LÓGICA Y TEORÍA DE LA CIENCIA

METALOGICA

Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden

Geoffrey Hunter

PARANINFO

Garantía
EL LIBRO TÉCNICO
Tomás Morales, 44
Tefs. 928 - 360263 - 362791
35003 - LAS PALMAS DE G. C.

METALOGICA

Geoffrey Hunter

Senior Lecturer del Departamento de Lógica
y Metafísica de la Universidad de St. Andrews

METALOGICA

Introducción a la metateoría de la lógica clásica de primer orden

1981

PARANINFO S.A.

MADRID

Colección:
LOGICA Y TEORIA DE LA CIENCIA

Trad.: Rodolfo Fernández González,
Departamento de Lógica.
Universidad Complutense.

© Geoffrey Hunter

© de la edición española, Paraninfo, S.A. Madrid (España)

© de la traducción española, Paraninfo, S.A. Madrid (España)

Título original:

METALOGIC An Introduction to the Metatheory
of Standard First Order Logic

Reservados los derechos de edición,
reproducción o adaptación.

IMPRESO EN ESPAÑA
PRINTED IN SPAIN

ISBN: 333.11590.2 (edición inglesa)
ISBN: 84-283-1102-1 (edición española)

Depósito Legal: M-4561-1981

PARANINFO S.A. Magallanes, 25 – Madrid-15 (2,5-2750)

Alco, artes gráficas. Jaspe, 34. Madrid-26

A mi madre y a la memoria de mi padre,

Joseph Walter Hunter

Indice

Prefacio 11

Primera parte: **Introducción: nociones generales**

1. Lenguajes formales 18
2. Interpretaciones de lenguajes formales. Teoría de modelos . 20
3. Mecanismos deductivos. Sistemas formales. Teoría de la demostración 21
4. 'Sintáctico', 'Semántico' 23
5. Metateoría. La metateoría de la lógica 24
6. Uso y mención. Lenguaje-objeto y metalenguaje. Demostraciones en un sistema formal y demostraciones acerca de un sistema formal. Teorema y metateorema 25
7. La noción de *método efectivo* en lógica y matemática..... 28
8. Conjuntos decidibles..... 30
9. Correspondencia *uno a uno* (1-1). Tener el mismo número cardinal que. Tener un número cardinal mayor (o más pequeño) que 31
10. Conjuntos finitos. Conjuntos enumerables. Conjuntos numerables. Conjuntos no-numerables..... 32
11. Demostración de la no-numerabilidad del conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales 37
12. Secuencias. Enumeraciones. Enumeraciones efectivas..... 41
13. Teoremas acerca de conjuntos infinitos..... 42
14. Demostración informal de la incompletud de cualquier sistema formal finitista de la teoría no-restringida de los números naturales 44

Apéndice 1: **Teoría intuitiva de conjuntos infinitos y de números cardinales transfinitos**..... 47

Segunda parte: **Lógica proposicional veritativo-funcional**

15. Funciones 64
16. Funciones de verdad 66
17. Un lenguaje formal para la lógica proposicional veritativo-funcional: el lenguaje formal P 72
18. Convenciones (notacionales): 1. Uso de comillas. 2. Eliminación de paréntesis 74
19. Semántica de P. Definiciones de *interpretación de P, verdadero/falso para una interpretación de P, modelo de una fórmula-conjunto de fórmulas de P, fórmula lógicamente válida de P, fórmula consistente desde el punto de vista de la teoría de modelos/conjunto de fórmulas de P, consecuencia semántica* (en fórmulas de P), *tautología de P* 75
20. Algunas verdades acerca de $\models^{P}$. El Teorema de Interpolación para P 79
21. Potencia expresiva de P. Conjuntos adecuados de conectivas 80
22. Un mecanismo deductivo para P: el sistema formal SP. Definiciones de *demostración en SP, teorema de SP, derivación en SP, consecuencia sintáctica en SP, conjunto de SP, consistente desde el punto de vista de la tería de la demostración* 90
23. Algunas verdades acerca de $\vdash_{SP}$ 96
24. Conceptos de consistencia 97
25. Demostración de la consistencia de SP 98
26. El teorema de deducción para SP 103
27. Nota acerca de las demostraciones por inducción matemática 108
28. Algunos metateoremas de la teoría de modelos acerca de SP 111
29. Conceptos de completud semántica. Importancia para la lógica de una demostración de la adecuación y de la completud semántica de un sistema formal de la lógica proposicional veritativo-funcional 112
30. Esquema de la demostración de Post de la completud semántica de un sistema formal de lógica proposicional veritativo-funcional 115
31. Demostración de la completud semántica de SP por el método de Kalmár 116

32. Demostración de la completud semántica de SP por el método de Henkin 126
33. Conceptos de completud sintáctica. Demostración de la completud sintáctica (en un sentido) de SP 138
34. Demostración de la decidibilidad de SP. Sistema decidible y fórmula decidible. Definición de *procedimiento efectivo de demostración* 141
35. Sentido ampliado de 'interpretación de P'. Modelos finitos débiles y modelos finitos fuertes 142
36. Demostración de la independencia de los tres esquemas de axiomas de SP 144
37. Formalización de Anderson y Belnap de la lógica proposicional veritativo-funcional: el sistema AB 147

Tercera parte: **Lógica de predicados de primer orden: consistencia y completud**

38. Un lenguaje formal para la lógica de predicados de primer orden: el lenguaje Q. Los lenguajes Q^+ 161
39. Semántica de Q (y Q^+). Definiciones de *interpretación de* $Q(Q^+)$, *satisfacción* de una fórmula por una secuencia enumerable de objetos, *satisfacible*, *simultáneamente satisfacible*, *verdadero para una interpretación de* $Q(Q^+)$, *modelo de una fórmula o conjunto de fórmulas de* $Q(Q^+)$, *fórmula lógicamente válida de* $Q(Q^+)$, *consecuencia semántica* (para fórmulas de $Q(Q^+)$), *k-validez* 165
40. Algunos metateoremas de $Q(yQ^+)$ desde el punto de vista de la teoría de modelos 176
41. Un mecanismo deductivo para Q: el sistema formal SQ. Definiciones de *demostración en SQ*, *teorema de SQ*, *derivación en SQ*, *consecuencia sintáctica en SQ*, *conjunto consistente de SQ* [*desde el punto de vista de la teoría de la demostración*] 192
42. Demostración de la consistencia de SQ 194
43. Algunos metateoremas acerca de SQ 195
44. Teorías de primer orden 199
45. Algunos metateoremas acerca de teorías cualesquiera de primer orden. Completud respecto de la negación. Teorías cerradas de primer orden. El Teorema de Löwenheim-Skolem. El Teorema de Compacidad 199

46. Demostración de la completud semántica de SQ 222
47. Un sistema formal de la lógica de predicados de primer orden con identidad: el sistema $SQ^{=}$. Demostración de la consistencia de $SQ^{=}$. Modelos normales. Demostración de la adecuación de $SQ^{=}$ 224
48. Isomorfismo de modelos. Categoricidad. Modelos no-clásicos 229
49. Implicaciones filosóficas de algunos de los resultados anteriores 234
50. Un sistema formal de la lógica de predicados monádicos de primer orden: el sistema SQ^{M}. Demostraciones de su consistencia, completud semántica y decidibilidad 237

Cuarta parte: **Lógica de predicados de primer orden: indecidibilidad**

51. Algunos resultados acerca de la indecidibilidad 247
52. Tesis de Church (1935). Teorema de Church (1936) 259
53. Funciones recursivas. Conjuntos recursivos 261
54. Representación, representación fuerte y definibilidad de funciones en un sistema formal 263
55. Un sistema formal de la aritmética: el sistema H 265
56. Demostración de la indecidibilidad de H 267
57. Demostración de la indecidibilidad de $SQ^{=}$. La indecidibilidad de SQ 279
58. Subclases decidibles de fórmulas de Q lógicamente válidas. Forma normal prenexa. Forma normal de Skolem. Dos resultados negativos 282
59. Cabos sueltos: la validez lógica y el dominio vacío. 2. Omega-inconsistencia y omega-incompletud. 3. Los teoremas de Gödel. 4. El axioma de elección. 5. Conjuntos recursivamente enumerables 285

Apéndice 2: **Resumen de los resultados metateoréticos básicos para teorías de primer orden** 289

Referencias 293

Indice de autores, términos y símbolos utilizados 305

Prefacio

Mi principal propósito es el de poner al alcance de aquellos lectores que no tienen ningún entrenamiento especial en matemáticas, y que sólo dispongan de un conocimiento elemental de la lógica moderna, demostraciones completas de los metateoremas fundamentales de la lógica clásica de primer orden (básicamente veritativo-funcional), incluyendo una demostración completa de la indecidibilidad de un sistema de la lógica de predicados de primer orden con identidad.

Muchos libros elementales de lógica se detienen precisamente cuando el tema se pone interesante. Este libro comienza en ese punto y se ocupa de las partes interesantes hasta llegar a incluir una demostración de que:

> es imposible programar un ordenador que dé la respuesta correcta (y ninguna respuesta equivocada) a toda pregunta de la forma «¿Es_____una verdad puramente lógica?»

El libro está pensado para no-matemáticos y va explicando conceptos matemáticos y de teoría de conjuntos a medida que éstos van siendo necesarios.

Los temas principales son los siguientes: demostraciones de la consistencia, completud y decidibilidad de un sistema formal de lógica proposicional veritativo-funcional clásica. Las mismas demostraciones respecto de la lógica de predicados monádicos de primer orden. Demostraciones de la consistencia, completud e indecidibilidad de un sistema formal de la lógica de predicados de primer orden con identidad. Una demostración de la existencia de un modelo no clásico de un sistema formal de la aritmética.

Supondremos que el lector se encuentra en posesión de un conocimiento elemental de las conectivas veritativo-funcionales, de las tablas de verdad y de los cuantificadores. Para el lector que desconozca la

teoría de conjuntos ofrecemos unas explicaciones muy breves acerca de algunas notaciones e ideas que serán utilizadas más adelante:

1. *La notación de conjuntos mediante llaves*

'{Juan, Pedro}' significa 'El conjunto cuyos únicos elementos son Juan y Pedro' '{3, 2, 1, 3, 2}' significa 'El conjunto cuyos únicos elementos son los números 3, 2, 1, 3, 2' (y este último conjunto es el mismo conjunto que el conjunto {1, 2, 3}, es decir, el conjunto cuyos únicos elementos son los números 1, 2 y 3).

2. *La notación de la pertenencia a un conjunto mediante épsilon*

'$n \in X$' significa 'n es un elemento del conjunto X'.

3. *El criterio de identidad de conjuntos*

Un conjunto A es el mismo conjunto que un conjunto B si, y sólo si, A y B tienen exactamente los mismos elementos. Para la identidad de conjuntos *ninguna otra cosa resulta relevante.*

4. *El conjunto vacío, ϕ*

Por el criterio de identidad de conjuntos [que acabamos de ver (3)], si A es un conjunto que no tiene ningún elemento y B es un conjunto que no tiene ningún elemento, entonces A es el mismo conjunto que B. De esta forma, si existe un conjunto que no tiene ningún elemento, existe sólo un conjunto de este tipo. Supondremos que existe tal conjunto.

Puede encontrarse información introductoria adicional acerca de la teoría de conjuntos en, por ejemplo, el capítulo 9 de Suppes (1957), o en el capítulo 1 de Fraenkel (1961).

Este libro se ocupa solamente de (1) lógica *clásica* (es decir, básicamente veritativo-funcional), y (2) de sistemas *axiomáticos.*

(1) La lógica clásica de primer orden, junto con su metateoría, constituye hoy un área segura de conocimiento; no es toda la lógica, pero constituye una parte importante de ella, y nos sirve de trampolín para alcanzar la mayor parte de los restantes desarrollos de la lógica moderna. Me ha parecido que no existía ningún libro que intentara hacer accesibles a los no-matemáticos las demostraciones completas de la metateoría básica de la lógica clásica. He aquí ese libro.

(2) Los sistemas sin axiomas (llamados 'sistemas de deducción natural') se han hecho actualmente más populares que los sistemas axio-

máticos, ya que, en general, resulta más breve y más cómodo encontrar las demostraciones formales de teoremas *dentro de* un sistema mediante un sistema de deducción natural que mediante uno axiomático. Pero, por el contrario, creo que las demostraciones completas de *metateoría* (teoremas *acerca de* un sistema) son en general más largas y más laboriosas en el caso de sistemas de deducción natural que en el de sistemas axiomáticos. Por ello, puesto que me interesan fundamentalmente demostraciones de teoremas acerca de sistemas, y puesto que, además, todo lo que puede obtenerse con un sistema de deducción natural puede obtenerse también con uno axiomático, me he concentrado deliberadamente sobre sistemas axiomáticos.

Espero que esta obra permitirá a aquellos que no son especialistas en matemáticas no sólo abordar obras más avanzadas acerca de la lógica clásica, tales como las de Kleene, Mendelson, Schoenfield o Smullyan[1], sino también la estructuración de sistemas de lógica no-clásica que resulten filosóficamente interesantes, así como demostrar metateoremas sobre ellos. Creo que, en la actualidad, las tareas más urgentes de los lógicos se encuentran en la lógica no-clásica. Por ejemplo, hay un sentido del 'si' que es crucial para muchos argumentos cotidianos. Para mí resulta claro que el 'si' en ese sentido no es una conectiva veritativo-funcional; y, por lo tanto, creo que es escandaloso que ese sentido todavía no haya sido recogido en ningín sistema formal interpretado con una adecuada metateoría. Encomiendo esta tarea a mis lectores, quienes pueden encontrar ayuda en Church (1956) y en Hughes y Cresswell (1968).

Los libros de los que he ido tomando prestadas la mayoría de las ideas son los de Mendelson (1964) y Margaris (1967). Agradezco a las siguientes personas sus ideas, informaciones o críticas: Ross Brady, John Crossley, John Derrick, Len Goddard, Jeff Graves, Geoffrey Keene, Martin Löb, Angus Macintyre, Timothy Potts, Rowan Rockingham Gill, Harold Simmons, Dick Smith y Bob Stoothoff. Mis antecesores y colegas del Departamento de Lógica y Metafísica de la Universidad de St. Andrews, y especialmente los profesores J. N. Wright y L. Goddard, hicieron posible mi dedicación a esta parte de la lógica y, sin ellos, este libro no existiría.

GEOFFREY HUNTER

St. Andrews,
Diciembre de 1969

[1] Cfr. las pp. 277 ss para referencias más detalladas.

Estoy en deuda con Ross Brady, M. J. Creswell, Rod Girle, John Hall, L. Hodes, Harry Lewis, J. Howard Sobel y Barry Taylor, por sus correcciones a la primera impresión de este libro. También estoy en deuda con Creslaw Lejewski; con el recientemente desaparecido Richard Montague, quien leyó parte del libro por cuenta de la University of California Press, para una crítica preliminar; y con Alan Anderson y Nuel Belnap por su magnífico sistema de la sección 37.

G. H.

Octubre, 1972

Debo agradecer correcciones adicionales a M. C. Bradley, Laurence Goldstein, Michael Levin y Hugh Rice.

G. H.

Julio, 1979

PRIMERA PARTE

Introducción: Nociones generales

Para obtener una idea adecuada acerca de lo que es la metateoría de la lógica, comenzaremos por las

(1) *verdades de la lógica.*

Estas se distinguen de las

(2) *oraciones utilizadas para expresar verdades de la lógica.*

(Dos oraciones distintas, por ejemplo una en francés y otra en castellano, podrían utilizarse para expresar la misma verdad de la lógica.)

Consideremos ahora

(3) *la teoría de las oraciones-utilizadas-para-expresar-verdades-de-la-lógica.*

Esta última es, en sentido amplio, *la metateoría de la lógica.*

La mayor diferencia entre metateoría en este sentido amplio y metateoría en el sentido empleado en esta obra se encuentra en (2). En este libro, las oraciones-utilizadas-para-expresar-verdades-de-la-lógica deben ser fórmulas de un *lenguaje formal*, es decir, un 'lenguaje' que pueda especificarse completamente sin ninguna referencia en absoluto, ni directa ni indirecta, al significado de las fórmulas del 'lenguaje'. El resultado de insistir sobre este requisito fué que la metateoría de la lógica, después de una historia larga e interesante pero inconexa, llegó a proporcionar en este siglo resultados profundos, nuevos y exactos, con el anuncio de un crecimiento sistemático.

Comenzaremos, por lo tanto, con los lenguajes formales.

1. Lenguajes formales

Los objetos básicos de la metateoría son *lenguajes formales.*

Lo esencial de un lenguaje formal es que, aunque se le dé una interpretación, *puede definirse completamente sin hacer referencia a ninguna interpretación suya.* Y no necesita que se le dé interpretación alguna.

Un lenguaje formal puede identificarse con el conjunto de sus *fórmulas bien formadas* (llamadas también *fórmulas* o *fbfs*). Si el conjunto de todas las fbfs de un lenguaje formal L es exactamente el mismo que el conjunto de todas las fbfs de un lenguaje formal L', entonces L es el mismo lenguaje formal que L'. En caso contrario, no es así.

Una *fórmula* es una cosa abstracta. Una *muestra (token)* de una fórmula es una marca o una hilera de marcas. Dos cadenas diferentes de marcas pueden ser muestras de la misma fórmula. Para que una fórmula exista no es necesario que exista ninguna muestra de ella. (Por ejemplo, tenemos el propósito de hablar de lenguajes formales que disponen de un número infinito de fórmulas).

El conjunto de las fórmulas bien formadas de un lenguaje formal específico viene determinado por una decisión de su creador, que se limita a dejar establecido qué cosas tienen que ser fbfs de su lenguaje. Habitualmente, hace esto especificando

(1) un conjunto de *símbolos* (el *alfabeto*) de su lenguaje,

y

(2) un conjunto de *reglas de formación* que determinan qué secuencias de símbolos de su alfabeto son fbfs de su lenguaje.

Tiene que ser posible definir ambos conjuntos sin hacer ninguna referencia a una interpretación. En otro caso, el lenguaje no es un lenguaje formal.

La palabra 'símbolos' del último párrafo es un término técnico: los símbolos, en este sentido técnico de la palabra, no tienen por qué ser símbolos de nada, pero tienen que poder ser especificados sin hacer referencia a ninguna interpretación suya.

Los símbolos, como las fórmulas, son cosas abstractas. Una muestra de un símbolo es una marca o una configuración de marcas.

En sentido amplio, una máquina adecuada, que no poseyera ningún entendimiento, podría dominar completamente un lenguaje formal. (Hay que matizar esto en el caso de que el lenguaje formal tuviera un alfabeto no numerable (ver secc. 10 más adelante). En tal caso no resulta claro que haya algo que pudiera dominar completamente el lenguaje formal.)

Dado un lenguaje formal específico, podemos pasar a hacer una o ambas de las dos cosas siguientes:

1. Podemos definir la noción de *una interpretación del lenguaje.* Esto nos lleva a la *teoría de modelos.*

2. Podemos especificar para el lenguaje un *mecanismo deductivo.* Esto nos lleva a la *teoría de la demostración.*

EJERCICIOS

1. El lenguaje W se define de la siguiente forma:

   Alfabeto: Δ □

   Fórmulas: Cualquier cadena finita de símbolos del alfabeto de W que comience con 'Δ' es una fórmula.

   ¿Es W un lenguaje formal?

2. El lenguaje X se define de la forma siguiente:

   Alfabeto: a b c d e f g

   Fórmulas: Toda cadena finita de símbolos del alfabeto de X que dé lugar a una palabra castellana es una fórmula.

   ¿Es X un lenguaje formal?

3. El lenguaje Y se define de la forma siguiente:

   Alfabeto: a b c d e f g

   Fórmulas: Toda cadena finita de símbolos del alfabeto de Y que no dé lugar a una palabra castellana es una fórmula.

   ¿Es Y un lenguaje formal?

RESPUESTAS

1. Sí.

2. No. La definición de *fórmula de X* entraña esencialmente una referencia al significado, ya que una cosa es una palabra castellana sólo si tiene un significado. (Para saber que una cosa es una palabra no hay que saber *qué* es lo que significa, sino sólo *que* tiene un significado. Pero esta débil referencia al significado es suficiente para impedir que X sea un lenguaje formal.) (Otra forma de decirlo: podríamos programar una máquina para que nos dijera si la cadena de símbolos era una palabra en algún diccionario castellano determinado, y la máquina nos lo podría decir sin saber el significado de ninguna palabra. Pero, con algunas excepciones que podemos dejar de lado, sólo se incluye algo en un diccionario si tiene uno o varios significados.)

3. No. Para decir si una cadena de símbolos del alfabeto de Y es o no una fórmula de Y tenemos que saber si es una palabra castellana o no, y, por lo tanto, si tiene un significado o no. Por ejemplo, ¿cómo se podría decir que 'cae', o 'gafe', o 'de', o 'becada', o 'geg', o 'fea', es una fórmula de Y? Sólo descubriendo que es una palabra castellana dotada de significado. (De hecho, parece que 'geg' es la única cadena que no es una palabra castellana, y, por lo tanto, es la única que es una fórmula de Y.)

2. Interpretaciones de lenguajes formales. Teoría de modelos

Hablando en general y en términos amplios, una *interpretación* de un lenguaje formal es una asignación de significados a sus símbolos y/o fórmulas.[1] La *teoría de modelos* es la teoría de las interpretaciones de lenguajes formales (un *modelo* de una fórmula de un lenguaje es una interpretación del lenguaje para la cual la fórmula resulta verdadera)[2]. Entre los conceptos de la teoría de modelos se encuentran los de *verdadero para una interpretación*, *consecuencia semántica* (o *consecuencia desde el punto de vista de la teoría de modelos*) *y validez lógica.*

EJERCICIO

Dar una interpretación para el lenguaje formal W (secc. 1, ejercicio 1).

RESPUESTA

Una interpretación posible sería: Tomar 'Δ' como si significara lo mismo que el dígito (decimal) '1', '$\square$' como si significara lo mismo que el dígito '0', y cada fórmula correspondiente como si significara lo mismo que una cifra decimal compuesta exclusivamente de unos y ceros. Así, por ejemplo, '$\Delta \square \Delta$' significaría lo mismo que '1 0 1' en el sistema decimal.

Esto muestra que, en un sentido muy amplio de 'interpretación', una fórmula interpretada no tiene por qué constituir una proposición, en donde entendemos por 'proposición' una oración que expresa algo verdadero o falso. Puede ser, como sucede aquí, el nombre de algo. O puede ser un adjetivo, o un adverbio, o una preposición, o una frase, o una cláusula, o una oración imperativa, o una cadena de oraciones, o una cadena de nombres, o... También podrían atribuirse a los símbolos unos significados tales que algunas o todas las fórmulas interpretadas resultaran carentes de sentido. Más adelante restringimos la noción de interpretación: ver p. 20, nota 1.

3. Mecanismos deductivos. Sistemas formales. Teoría de la demostración

Mediante la especificación de un mecanismo deductivo para un lenguaje formal, obtenemos un sistema formal.

Un *sistema formal* S es un lenguaje formal L junto con un *mecanismo deductivo* que viene dado por

(1) el establecimiento por decreto de que ciertas fórmulas de L han de ser *axiomas* de S

y/o

(2) el establecimiento por decreto de un conjunto de *reglas de transformación* (llamadas también *reglas de inferencia*) que determina qué relaciones entre fórmulas de L constituyen relaciones de *consecuencia inmediata* en S (Intuitivamente, las reglas de transformación autorizan la derivación de algunas fórmulas a partir de otras).

El mecanismo deductivo tiene que poder definirse sin hacer referencia a ninguna interpretación propuesta. En otro caso, el sistema no sería un sistema formal.

Un mecanismo deductivo consta de axiomas y reglas de inferencia, sólo de axiomas, o sólo de reglas de inferencia.

La *teoría de la demostración* es aquella parte de la teoría de los sistemas formales (es decir, de los lenguajes formales dotados de mecanismos deductivos) que no entraña de manera esencial una teoría de modelos (es decir, que no requiere de ninguna referencia a interpretaciones de los lenguajes). Entre los conceptos que pertenecen a la teoría de la demostración se encuentran los de *demostración en un sistema* (o *demostración formal*), *teorema de un sistema* (o *teorema formal*), *derivación en un sistema* (o *derivación formal*), *y consecuencia sintáctica* (o *consecuencia desde el punto de vista de la teoría de la demostración*). Todos ellos entrañan una referencia esencial a un mecanismo deductivo, y todos ellos pueden definirse sin hablar para nada de interpretaciones.

Podemos identificar un lenguaje formal con el conjunto de todas sus fbfs. Pero no podemos identificar un sistema formal con el conjunto de todos sus teoremas. Y esto es así porque dos sistemas formales S y S′ pueden tener exactamente los mismos teoremas y seguir siendo diferentes en algún aspecto importante desde el punto de vista de la teoría de la demostración. Por ejemplo, una fórmula A que sea una consecuencia sintáctica en S de una fórmula B puede no ser una consecuencia sintáctica de B en S′.

EJERCICIOS

Sea Z el sistema definido de la siguiente forma:

Alfabeto: Δ □

Fórmulas: Toda cadena finita de símbolos del alfabeto de Z que comience por 'Δ' es una fórmula de Z. Ninguna otra cosa es una fórmula de Z.

Axioma: Δ □ □ □

Regla de Inferencia: Toda fórmula de Z cuyos dos últimos símbolos sean 'Δ' y '□', en ese orden, es una consecuencia inmediata en Z de toda fórmula de Z cuyos dos primeros símbolos sean 'Δ' y '□', en ese orden [Por ejemplo, 'Δ □ □ □ Δ Δ □' es una consecuencia inmediata en Z de 'Δ □ Δ Δ Δ □ Δ'.] Ninguna otra cosa es una consecuencia inmediata de algo en Z.

1. ¿Es Z un sistema formal?
2. ¿Es 'ΔΔ□' una consecuencia inmediata en Z de 'Δ□□□'?

3. ¿Es '$\Delta\Box$' una consecuencia inmediata en Z de '$\Delta\Box$'?
4. ¿Es '$\Delta\Box\Box\Delta$' una consecuencia inmediata en Z de '$\Delta\Box\Box\Delta$'?
5. ¿Es '$\Box\Box\Delta\Delta\Box$' una consecuencia inmediata en Z de '$\Delta\Box\Delta\Delta\Delta$'?
6. Dar un ejemplo de una consecuencia inmediata en Z de '$\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta$'.

RESPUESTAS

1. Sí.
2. Sí.
3. Sí.
4. No. Sólo las fórmulas que acaban en '... $\Delta\ \Box$' pueden ser consecuencias inmediatas en Z.
5. No. '$\Box\Box\Delta\Delta\Box$' no es una fórmula de Z, puesto que no comienza por 'Δ'.
6. No existe ninguno. Sólo las fórmulas que comienzan por '$\Delta\ \Box$ ...' pueden tener consecuencias inmediatas en Z.

4. 'Sintáctico', 'Semántico'

'Sintáctico' y 'semántico' tendrán en este libro los significados siguientes:

Sintáctico: lo que tiene que ver con lenguajes formales o con sistemas formales sin una referencia esencial a su interpretación.

Semántico: lo que tiene que ver con la interpretación de los lenguajes formales.

'Sintáctico' tiene un sentido ligeramente más amplio que 'desde el punto de vista de la teoría de la demostración', ya que puede aplicarse tanto a propiedades de lenguajes formales sin mecanismos deductivos, como a propiedades de sistemas formales. 'Semántico' tiene en este libro un significado que coincide con el significado de 'desde el punto de vista de la teoría de modelos'.

EJERCICIOS

1. El que una fórmula del sistema Z (secc. 3, ejercicios) sea una consecuencia inmediata en Z de otra fórmula de Z, ¿es una propiedad sintáctica o semántica de esa fórmula?

2. Que una fórmula denote un número, ¿es una propiedad sintáctica o semántica de esa fórmula?

3. Que una fórmula sea verdadera, ¿es una propiedad sintáctica o semántica de esa fórmula?

RESPUESTAS

1. Sintáctica.

2. Semántica: la expresión 'que una fórmula denote un número' puede parafrasearse mediante la expresión 'que puede *interpretarse* que una fórmula denota un número'.

3. Semántica: la expresión 'que una fórmula sea verdadera' puede parafrasearse mediante la expresión 'que puede *interpretarse* que una fórmula exprese algo verdadero'.

5. Metateoría. La metateoría de la lógica

La *Metateoría* es la teoría de los lenguajes y sistemas formales, y de sus interpretaciones. Considera los lenguajes y los sistemas formales y sus interpretaciones como sus objetos de estudio, y consiste en un cuerpo de verdades y conjeturas acerca de esos objetos. Entre sus problemas principales se encuentran problemas acerca de la *consistencia*, *completud* (en diversos sentidos), *decidibilidad* (ver secc. 8, más adelante) e *independencia* de conjuntos de fórmulas. Tanto la teoría de modelos como la teoría de la demostración pertenecen a la metateoría.

La *metateoría de la lógica* es la teoría de aquellos lenguajes y sistemas formales que por una u otra razón interesan al lógico. Normalmente, éste se interesa por un lenguaje formal porque éste tiene fórmulas que pueden interpretarse como si expresaran verdades lógicas; y normalmente se interesa por un sistema formal porque sus teoremas pueden interpretarse como si expresaran verdades lógicas o porque sus reglas de transformación pueden interpretarse como reglas de inferencia lógicamente válidas.

6. Uso y mención. Lenguaje-objeto y metalenguaje. Demostraciones en un sistema formal y demostraciones acerca de un sistema formal. Teorema y metateorema.

En la lógica, las palabras 'uso' y 'mención' (tanto los nombres como los verbos) se usan a veces en sentido técnico para indicar una importante distinción, que explicamos mediante un ejemplo:

A. 'Londres' es una palabra de siete letras.
B. Londres es una ciudad.

En A, se dice que la palabra 'Londres' ha sido *mencionada;* en B, se dice que la palabra 'Londres' ha sido *usada* (y no mencionada).

Existen diversas formas para indicar que estamos mencionando una expresión; por ejemplo, encerrándola entre comillas (como en el caso anterior), o imprimiéndola en itálicas, o subrayándola. Nosotros haremos uso de algunos de dichos recursos, pero para ahorrar comillas, y también para que el texto resulte más fácil de leer, usaremos además una convención habitual. En aquellos casos en los que resulte claro por el contexto que las expresiones se están mencionando, y no usando, a veces omitiremos las comillas: por ejemplo, en vez de escribir

'$\supset$' es una conectiva veritativo-funcional

escribiremos simplemente

$\supset$ es una conectiva veritativo-funcional

y en lugar de escribir

El conjunto {'$\sim$', '$\wedge$', '$\vee$'}

escribiremos simplemente

El conjunto $\{\sim, \wedge, \vee\}$

A los lenguajes formales frecuentemente se les llama *lenguajes-objeto.* El lenguaje utilizado para describir un lenguaje-objeto se dice que es el *metalenguaje* de este último. Nosotros constituimos nuestro metalenguaje utilizando el castellano, completándolo con un simbolismo especial (que incluye el simbolismo de la teoría de conjuntos).

Una *demostración en un sistema formal* que tenga axiomas (y todos aquéllos de los que nos ocuparemos tendrán axiomas) es una cadena de fórmulas de un lenguaje formal que satisface ciertos requisitos puramente sintácticos y que no posee ningún significado.

Una *demostración acerca de un sistema formal* es un fragmento de discurso dotado de significado, expresado en el metalenguaje, que justifica un enunciado verdadero acerca del sistema.

De forma semejante, un *teorema de un sistema formal* es una fórmula de un lenguaje formal que satisface ciertos requisitos puramente sintácticos y que no tiene ningún significado, mientras que un *teorema acerca de un sistema formal* (también llamado *metateorema*) es un enunciado verdadero acerca del sistema, expresado en el metalenguaje.

EJERCICIOS

1. *Dama cristiana:* Es suficiente para mi argumento que admitáis que la existencia de Dios, si no es segura, es al menos probable; o que si no es probable, es al menos posible.

Infiel: No puedo admitir tal cosa a menos que sepa qué entendéis por la palabra 'Dios'.

Charles Bradlaugh, '*Doubts in Dialogue*', *National Reformer*, 23 de Enero de 1887.

(*a*) En el diálogo anterior, la dama cristiana ¿está usando o está mencionando la palabra 'Dios', en el peculiar sentido lógico de las palabras 'uso' y 'mención'?

(*b*) El infiel, ¿está usando o mencionando la palabra 'Dios'?

2. En cada uno de los casos siguientes, decir si el enunciado 'Cierra la puerta' está usado o mencionado:

(*a*) 'Cierra la puerta' se utiliza para hacer una petición o para emitir una orden.

(*b*) Cierra la puerta.

(*c*) No sé qué es lo que quieres decir mediante 'Cierra la puerta'.

3. Decir, en cada uno de los siguientes casos, si el enunciado 'La crueldad es mala' está usado o mencionado:

(*a*) La crueldad es mala, cualesquiera que sean las circunstancias.

(*b*) Las palabras *La crueldad es mala* expresan una proposición verdadera.

(*c*) el enunciado 'La crueldad es mala' se usa específicamente para condenar la crueldad.

4. En el siguiente enunciado, ¿qué palabras se usan y cuáles se mencionan?:

> Lo que *es* significa, es, y por lo tanto se diferencia de *es*, puesto que '*es* es' sería sinsentido.
>
> Bertrand Russell, *My Philosophical Development*, p. 63

5. La proposición

> No toda cadena formada por varios 'Δ' y '□' es una fórmula del sistema formal Z [de la secc. 3]

¿es un teorema de Z, un teorema acerca de Z, o un metateorema?

6. Puesto que, para cualquier sistema formal S, todo lo que es un axioma de S, o una consecuencia inmediata en S de un axioma de S, es un *teorema* de S, establecer si cada una de las siguientes (cadenas) es, o no, un teorema del sistema Z de la secc. 3. [*Nota.* No se pretende que esto sea una definición de la noción de *teorema formal*, sino meramente una simplificación por razón del ejercicio. La definición usual permite que muchas otras cosas sean teoremas.]

(*a*) Δ □ Δ □
(*b*) □ □ Δ □ [Para el Sistema Z, ver p. .]
(*c*) Δ □ □ □
(*d*) 'Δ □ □ □' es un teorema de Z.

7. 'Sean A y B fórmulas cualesquiera de un lenguaje formal L'. Explicar la función de las letras 'A' y 'B' en este enunciado.

8. En los ejercicios de la secc. 3 ¿se encuentran colocadas las comillas en todos los lugares en los que deben estar, y sólo en ellos?

RESPUESTAS

1. (*a*) Uso.
   (*b*) Mención.
2. (*a*) Mencionado.
   (*b*) Usado.
   (*c*) Mencionado.
3. (*a*) Usado.
   (*b*) Mencionado.
   (*c*) Mencionado.

4. El enunciado tiene una longitud de 15 palabras. Creo que la 1.ª, 2.ª, 9.ª, 11.ª y 12.ª palabras son mencionadas, y las otras son usadas. La 2.ª y la 9.ª palabras son nombres de la palabra 'es'. La primera de las

dos palabras entre comillas es el nombre de la palabra 'es'; la segunda es la palabra 'es'. De esta manera, menciona la palabra 'es'.

5. Es un teorema acerca de Z y un metateorema (acerca de Z). No es una fórmula de Z, de forma que no es un teorema de Z.

6. (*a*) Sí (una consecuencia inmediata del axioma).
   (*b*) No (ni siquiera es una fórmula: comienza por '□').
   (*c*) Sí (un axioma).
   (*d*) No. No es una fórmula de Z (ninguna fórmula de ninguno de los lenguajes formales de este libro contiene una expresión entre comillas). Se trata de un metateorema de Z.

7. 'A' y 'B' son aquí variables metalingüísticas, que pertenecen al metalenguaje del lenguaje L.

8. Eso espero.

7. La noción de *método efectivo* en lógica y matemática

Nos ocuparemos en lo que sigue de métodos efectivos *en lógica y matemática*, y no, por ejemplo, de métodos para decir si algo es o no un ácido.

En lógica y matemática, un *método efectivo* para resolver un problema es un método para computar la respuesta que, si se sigue correctamente y en la medida en que resulte necesario, tiene lógicamente que dar la respuesta correcta (y ninguna respuesta incorrecta) en un número finito de pasos. Un método efectivo para la solución de una clase de problemas es un método efectivo que funciona para cada problema de esa clase.

No es ésta una definición muy precisa, pero tampoco se trata de un concepto preciso, aunque pertenezca a los campos de la lógica, la matemática y la computación.

Los casos paradigmáticos de métodos efectivos son algoritmos matemáticos, como el algoritmo de Euclides (Libro VII, Prop. 1) que establece si dos enteros positivos tienen o no algún común divisor diferente de 1, o el logaritmo del mismo autor (Libro VII, Prop. 2) que sirve para encontrar el máximo común divisor de dos enteros positivos que no sean relativamente primos (es decir, que tengan algún común divisor distinto de 1).

Un método puede ser efectivo aunque en la práctica no sea posible seguirlo en la medida en que sería necesario en algún caso dado (o incluso en todos los casos). Por ejemplo, existen números tan grandes que el escribir o imprimir sus nombres en una notación adecuada requeriría más papel del que existe en todo el mundo. Por eso (salvo poderes extraordinarios de aritmética mental) no sería posible en la práctica encontrar su máximo común divisor siguiendo el logaritmo de Euclides. No obstante, incluso para esos números, el logaritmo de Euclides es un método efectivo.

Para que exista un método efectivo, no es necesario que sea conocido por alguna persona en un momento determinado. Pueden existir métodos efectivos que nadie haya descubierto nunca en toda la historia.

Puesto que un método efectivo debe ser susceptible de ser seguido mecánicamente, sin requerir de ninguna intuición, imaginación o ingenio por parte de su usuario, a veces la expresión 'método mecánico' se utiliza como un sinónimo de 'método efectivo'. Nuestra definición asegura que un método efectivo no debe requerir imaginación ni ingenio, al establecer como condiciones para que algo sea un método efectivo el que (1) sea un método de *computación*, y que (2) si es correctamente seguido, y en la medida en que pueda ser necesario, *lógicamente* tiene que dar la respuesta correcta.

Se objeta a nuestra explicación de 'método efectivo' que hemos dejado sin explicar las nociones de *computación* y de *tener lógicamente que*, que son cruciales en ella. Respondemos ahora a esta objeción que la noción de método efectivo es una noción imprecisa, intuitiva e informal, y no una noción precisa y formal, de manera que una explicación del sentido intuitivo tiene forzosamente que ser imprecisa. En una Parte posterior mencionamos algunas de las definiciones precisas de efectividad que se han sugerido, manteniéndose que corresponden satisfactoriamente a la noción intuitiva. (secc. 52, Tesis de Church).

EJERCICIOS

1. 'Preguntar a Dios' ¿es un método efectivo para resolver un problema?

2. 'Preguntar a un oráculo' ¿es un método efectivo?

3. 'Preguntar a un oráculo que siempre responde y que siempre dice la verdad' ¿es un método efectivo?

4. 'Decir primero "Sí", después decir "No"' ¿es un método efectivo para resolver un problema cuya respuesta correcta resulta que de hecho es 'Sí'?

5. 'Compruébalo con papel tornasol' ¿es un método efectivo (en el sentido definido) para establecer si algo es un ácido o no?

6. 'No se ha encontrado ninguna solución para este problema, de forma que no existe ningún método efectivo para resolverlo'. ¿Es éste un argumento válido?

RESPUESTAS

1. No. Ya que (a) no es un método de *computación*, y (b) no tiene lógicamente que dar la respuesta correcta, puesto que Dios no está obligado a responder.

2. No, por las mismas razones que en 1.

3. No. No es un método de *computación*.

4. No. Cfr. el requisito en la definición de que el método no daría respuestas equivocadas.

5. No. No es un método de *computación*. Tampoco tiene *lógicamente* que dar la respuesta correcta.

6. No. Para que exista un método efectivo no es necesario que haya de ser conocido por alguien.

8. Conjuntos decidibles

Un conjunto es *decidible* si, y sólo si, existe un método efectivo para establecer, respecto de cada cosa de las que pueden ser elementos del conjunto, si es realmente un elemento del conjunto o no.

Algunos autores exigen de un sistema formal que el conjunto de las demostraciones del sistema sea decidible. Nosotros no los seguiremos en esto. En cada uno de los principales sistemas formales de este libro, el conjunto de demostraciones del sistema es decidible de hecho. Pero la metateoría de alguno de ellos hace referencia ocasionalmente a sistemas que pueden tener o no conjuntos decidibles de demostraciones: es conveniente llamar sistemas formales a tales sistemas —y también en sentido propio, puesto que se definen en términos puramente sintácticos.

Todo conjunto *finito* es decidible. Piénsese intuitivamente en los elementos del conjunto como si estuvieran alineados en fila. Para determinar entonces si algo es un elemento del conjunto, habrá que comprobar si es idéntico a alguna de las cosas que están en la fila.

A partir de aquí abreviaremos 'si y sólo si' como 'sii'.

EJERCICIO

'Un conjunto no es decidible sii se ha demostrado que no existe ningún método efectivo para decir si algo es elemento suyo o no'. ¿Hay en este enunciado algo que sea erróneo?

RESPUESTA

Sí. Borre las palabras 'se ha demostrado que'.

9. Correspondencia uno a uno (1 – 1). Tener el mismo número cardinal que. Tener un número cardinal mayor (o más pequeño) que

Existe una *correspondencia* uno a uno entre un conjunto A y un conjunto B sii hay alguna manera (que no tiene por qué ser conocida por alguien) de emparejar los elementos de A con los elementos de B de forma que

(1) cada elemento de A esté emparejado con un elemento de B, y sólo con uno, y

(2) cada elemento de B esté emparejado con un elemento de A, y sólo con uno.

(De esto se sigue que ningún elemento de ambos conjuntos queda sin emparejar.)

Se dice que dos conjuntos *tienen el mismo número cardinal* o *la misma cardinalidad* sii existe entre ellos una correspondencia uno a uno.

Un conjunto A *tiene un número cardinal mayor que* un conjunto B sii existe una correspondencia uno a uno entre B y un subconjunto propio de A, pero no existe una correspondencia uno a uno entre B y la totalidad de A. (Un conjunto C es un *subconjunto propio* de un conjunto D [se escribe: $C \subset D$] sii no existe ningún elemento de C que no sea elemento de D, pero existe un elemento de D que no es un elemento de C.)

Un conjunto A *tiene un número cardinal más pequeño que* un conjunto B sii B tiene un número cardinal mayor que A.

El número cardinal de un conjunto se simboliza escribiendo dos líneas paralelas encima del nombre de un conjunto. Así, el número cardinal de un conjunto A es $\overline{\overline{A}}$, y '$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$' significa 'Los conjuntos A y B tienen el mismo número cardinal'. (Esta notación, que es la de Cantor, fue utilizada por él para significar una doble abstracción: (1) una abstracción de la naturaleza de los elementos del conjunto, (2) una abstracción del orden en el que se consideran; es decir, cuando hablamos del número cardinal de un conjunto, no nos interesa ni la naturaleza ni el orden de los elementos.)

EJERCICIO

'Todo conjunto guarda una correspondencia uno a uno consigo mismo'. ¿Verdadero o falso?

RESPUESTA

Verdadero. La razón de incluir este ejercicio era la de hacer patente que la palabra 'emparejamiento' de nuestra definición de *correspondencia* uno a uno se usa de tal forma que se puede decir con propiedad que una cosa está 'emparejada' consigo misma.

10. Conjuntos finitos. Conjuntos enumerables. Conjuntos numerables. Conjuntos no-numerables.

Los *números naturales* son los números 0, 1, 2, 3, etc.

Un conjunto es *finito* sii tiene solamente un número finito de elementos; es *enumerable* sii existe una correspondencia uno a uno entre él y el conjunto de los números naturales (de forma que un conjunto enumerable es un conjunto infinito); es *numerable* sii es finito o enumerable; y es *no-numerable* sii no es finito ni enumerable (de forma que un conjunto no-numerable es un conjunto infinito).

Se considera que 0 es un número finito, de forma que el conjunto vacío es un conjunto finito.

En la secc. 11 demostraremos la existencia de un conjunto no-numerable, suponiendo el Axioma del Conjunto Potencia (secc. 11.1). (En el

Apéndice 1 se demuestra la existencia de otros conjuntos no-numerables sin recurrir al Axioma del Conjunto Potencia.)

El tipo de infinito más pequeño es el infinito enumerable: ningún conjunto infinito tiene un número cardinal más pequeño que un conjunto enumerable. Así $\aleph^0$ [aleph sub cero], que es, por definición, el número cardinal del conjunto de los números naturales, es el número cardinal transfinito más pequeño. (Los números cardinales de conjuntos infinitos se conocen como cardinales transfinitos.)

Los conjuntos infinitos tienen como propiedad característica[3] que existe una correspondencia uno a uno entre cada uno de ellos y al menos uno de sus subconjuntos propios. Por ejemplo, existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los cuadrados de números naturales, que es un subconjunto propio del conjunto de los números naturales:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & \ldots \end{array}$$

Esta correspondencia particular fue conocida por Galileo (1638). El reconocimiento más o menos claro de que un conjunto infinito puede tener una correspondencia uno a uno con (alguno de) sus subconjuntos propios parece remontarse por lo menos hasta los Estoicos (¿Crisipo?) en el siglo tercero a. C. Pueden encontrarse referencias, por ejemplo, en Kleene (1967, p. 176, nota 121).

Ningún conjunto finito puede guardar una correspondencia uno a uno con ninguno de sus subconjuntos propios. De igual manera, C. S. Peirce consideró en 1885 [*Collected Papers*, iii, secc. 402] la inexistencia de tal correspondencia como una propiedad definitoria de los conjuntos finitos, en tanto que Dedekind consideró su existencia como una propiedad definitoria de los infinitos. (Dedekind publicó su definición en 1888. Afirma que la remitió a Cantor en 1882 y a Schwarz y Weber varios años antes: cf. Dedekind (1887, nota la secc. 64).)

EJERCICIOS

1. Mostrar que los siguientes conjuntos son enumerables:
   (*a*) El conjunto de los enteros positivos, {1, 2, 3, 4,...}.

(*b*) El conjunto de los números pares, {2, 4, 6, 8,...}.
(*c*) El conjunto de los números impares, {1, 3, 5, 7,...}.
(*d*) El conjunto de los enteros, {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3,...}.
(*e*) El conjunto de los números racionales positivos[4].
(*f*) El conjunto de los números racionales.

2. Mostrar cómo puede ponerse cada uno de los conjuntos del último ejercicio en correspondencia uno a uno de sus subconjuntos propios respectivos.

3. Mostrar que el conjunto de los cuadrados de un tablero de ajedrez infinito, con cuadrados de dos centímetros de lado, es enumerable.

4. Mostrar que $\aleph_0 - 1 = \aleph_0$ y que $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, y que, por lo tanto, $\aleph_0 \pm n = \aleph_0$, donde n es un número natural.

5. Mostrar que $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

RESPUESTAS

1. (*a*) El comienzo de una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los enteros positivos es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \end{array}$$

Para demostrar la existencia de una correspondencia uno a uno entre un conjunto A y el conjunto de los números naturales, basta con mostrar como se genera una secuencia infinita de elementos de A que contenga, sin repeticiones, a todos los elementos de A, y que no contenga nada que no sea un elemento de A. Así, para las demostraciones siguientes nos limitaremos a escribir los términos iniciales de las correspondientes secuencias generadas según la regla, añadiéndole explicaciones ocasionales. (Para más información sobre secuencias ver secc. 12.)

(*b*) 2, 4, 6, 8,...
(*c*) 1, 3, 5, 7,...
(*d*) 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3,... (En este caso no intentamos considerar los elementos del conjunto en orden de magnitud.)

(*e*) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \left[\frac{2}{2}\right], \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \left[\frac{2}{4}\right], \left[\frac{3}{3}\right], \left[\frac{4}{2}\right], \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \ldots$

(Primero escribimos todos los racionales positivos cuyo numerador y denominador suman 2. Sólo hay uno, $\frac{1}{1}$. Después escribimos todos aquellos cuyo numerador y denominadór suman 3, colocando los números que tienen numeradores más pequeños delante de los números que los tienen más grandes. Después hacemos lo mismo con los racionales cuyo numerador y denominador suman 4, y así sucesivamente. Cada vez que encontramos en este proceso un número que ya ha aparecido en la secuencia, lo omitimos: así, los números entre paréntesis cuadrados no están en la secuencia; están puestos simplemente para mostrar cómo se obtiene la secuencia.)

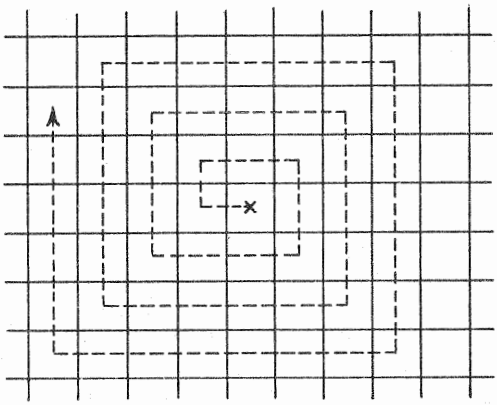
(*f*) $0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 4, -4, \ldots$

(Es la secuencia de (*e*) ampliada por el método de insertar detrás de cada término el correspondiente número negativo, y añadiendo 0 al comienzo.)

2. En cada caso emparejamos simplemente el primer término de la secuencia dada en la respuesta al ejercicio 1 con el segundo término, el segundo con el tercero, y así sucesivamente. Por ejemplo, en el caso (*a*):

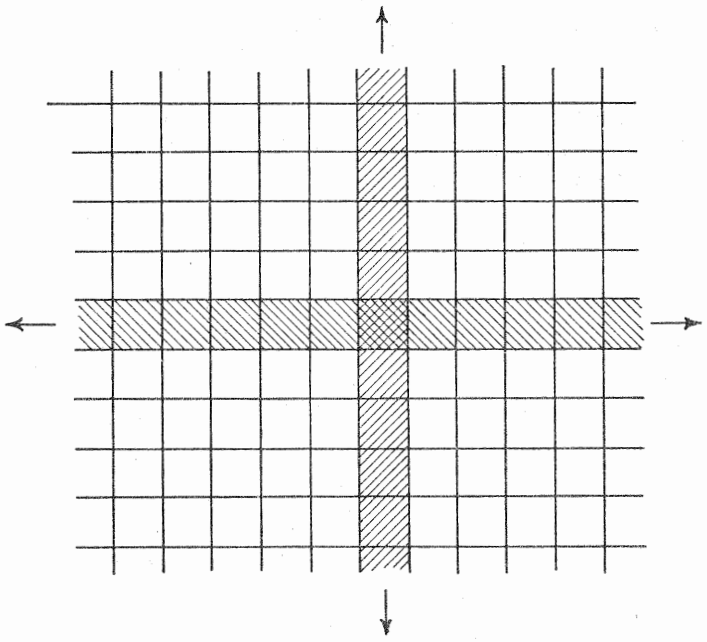
$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \end{array}$$

3. Pueden enumerarse comenzando en un cuadrado cualqüiera y siguiendo la ruta en espiral indicada en la siguiente figura:



4. Considérese la respuesta al ejercicio 2.

5. Considérese la respuesta al ejercicio 3. El número de los cuadrados del tablero de ajedrez infinito es el producto del número de los cuadrados que se encuentran a lo largo de una línea cualquiera del tablero y el número de los cuadrados que se encuentran a lo largo de otra línea perpendicular a la primera, lo que da el producto de $\aleph_0$ y $\aleph_0$:



11. Demostración de la no-numerabilidad del conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales

Un conjunto A es un *subconjunto* de un conjunto B [se escribe: $A \subseteq B$] sii no existe ningún elemento de A que no sea un elemento de B. El conjunto vacío, ϕ, es un subconjunto de cualquier conjunto, puesto que, para cualquier conjunto C, no existe ningún elemento de ϕ que no sea un elemento de C, simplemente porque no hay ningún elemento de ϕ. Asimismo, todo conjunto es un subconjunto de sí mismo. (Por el contrario, ningún conjunto es un subconjunto *propio* de sí mismo.)

El conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A se conoce como el *conjunto potencia* de A.

Intuitivamente parece obvio que el conjunto de los números naturales *tiene* su conjunto potencia, es decir, que *existe* un conjunto que tiene como elementos todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales, y nada más. Pero no hemos demostrado dicha afirmación. En este caso se acostumbra a apelar a un axioma más general:

11.1. (*El Axioma del Conjunto Potencia*) *Para todo conjunto existe su conjunto potencia*

Este axioma no puede considerarse verdadero con certeza, pero parece muy plausible, y lo daremos por supuesto de ahora en adelante.

11.2 *El conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales es no-numerable*

Demostración. Resulta claro que el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales no es finito, ya que a cada número natural le corresponde el conjunto que tiene a ese número natural como elemento único; existe una cantidad enumerable de tales conjuntos, y cada uno de ellos es un subconjunto del conjunto de los números naturales.

Supongamos ahora que alguien pretende que ha descubierto una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de números naturales. Vamos a mostrar cómo puede refutarse tal pretensión.

Supongamos que la susodicha correspondencia uno a uno comienza

de la siguiente forma:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0↔el conjunto de todos los números naturales	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	...
1↔el conjunto vacío	No	No	No	No	No	No	No	No	No	...
2↔el conjunto de todos los números pares	No	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	...
3↔el conjunto de todos los números impares	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No	...
4↔el conjunto de todos los números primos	No	No	Sí	Sí	No	Sí	No	Sí	No	...
5↔el conjunto de todos los cuadrados de los números naturales	Sí	Sí	No	No	Sí	No	No	No	No	...
6↔el conjunto de todos los cubos de los números naturales	Sí	Sí	No	No	No	No	No	No	Sí	...
. .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
. .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
. .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

(A la derecha de la tabla escribiremos 'Sí' debajo de un número si se trata de un elemento del conjunto mencionado a la izquierda, y 'No' si no lo es.)

Usamos el *argumento de la diagonal de Cantor* para mostrar que la supuesta correspondencia uno a uno no es, después de todo, una correspondencia uno a uno, puesto que podemos definir un subconjunto del conjunto de los números naturales que no aparece en su emparejamiento: el subconjunto que se define comenzando en la esquina superior izquierda de la matriz, y bajando en diagonal, cambiando cada 'Sí' por un 'No', y cada 'No' por un 'Sí', de forma que queda:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	...
No	**Sí**	No	No	No	No	No	No	No	...
No	No	**No**	No	Sí	No	Sí	No	Sí	...
No	Sí	No	**No**	No	Sí	No	Sí	No	...
No	No	Sí	Sí	**Sí**	Sí	No	Sí	No	...
Sí	Sí	No	No	Sí	**Sí**	No	No	No	...
Sí	Sí	No	No	No	No	**Sí**	No	Sí	...
.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	

Bajando por la diagonal, vemos que entre los elementos de este subconjunto estarán los números 1, 4, 5 y 6. El conjunto así definido es un subconjunto del conjunto de los números naturales que se diferencia de cada conjunto del emparejamiento original en al menos un elemento.

Este era sólo un ejemplo particular. Sin embargo, resulta claro que, para cualquier pretendido emparejamiento uno a uno de los subconjuntos del conjunto de los números naturales con los números naturales, un argumento de la diagonal semejante a éste proporcionaría un subconjunto del conjunto de los números naturales que *no* está en el emparejamiento. Así tenemos en general que:

> No existe ninguna correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales.

De esta forma, resulta que el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales no es enumerable. Hemos visto que no es finito. Luego es no-numerable.

Q.E.D.

El lector puede pensar por un momento que podríamos soslayar el argumento de la diagonal añadiendo un nuevo subconjunto al comienzo de la lista, emparejándolo con el número 0, y haciendo que los restantes subconjuntos se muevan un lugar hacia abajo. Pero esto no serviría de nada, ya que una nueva aplicación del argumento de la diagonal a la nueva lista produciría otro subconjunto que no estuviera en la lista. Y así sucesivamente, sin acabar jamás. Cualquier intento de emparejar los subconjuntos del conjunto de los números naturales con los números naturales omite no uno, sino una cantidad infinita de subconjuntos (en realidad, una cantidad no-numerable: cf. 13.6, más adelante).

Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números naturales y el conjunto cuyos elementos son {0}, {1}, {2}, {3}, y así sucesivamente. Este último subconjunto es un subconjunto propio del conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales. Así tenemos que: Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números naturales y un subconjunto propio del conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales, pero no existe ninguna correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales. Por lo tanto, *el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales tiene un número cardi-*

nal mayor que el conjunto de los números naturales (cf. de la definición de *tener un número cardinal mayor que*, en la secc. 9).

Usando una forma abstracta y general del argumento de la diagonal, Cantor mostró que *el conjunto potencia de un conjunto siempre tiene un número cardinal mayor que el conjunto mismo.* Esta afirmación es conocida como el *Teorema de Cantor.* Puede encontrarse una demostración de este teorema un poco más adelante, diferenciada mediante letra pequeña. Se presenta a continuación un ejemplo que puede ayudar a su comprensión.

Dados la existencia de un conjunto infinito cualquiera, la verdad del Axioma del Conjunto Potencia, y el Teorema de Cantor, se sigue que existe una sucesión inacabable de conjuntos infinitos y cada vez más grandes —'el paraíso que Cantor creó para nosotros' (Hilbert, 1925).

La siguiente demostración del teorema de Cantor puede ser omitida en una primera lectura:

Teorema de Cantor: El conjunto potencia de un conjunto tiene un número cardinal mayor que el de este conjunto.

Demostración

1. Sea A un conjunto cualquiera. Consideremos cualquier emparejamiento de los elementos de A con elementos del conjunto potencia de A, que asigna a cada elemento distinto de A un subconjunto diferente de A. Sea S el conjunto de todos los elementos de A que no son elementos del subconjunto asignado a ellos. S es un subconjunto de A. Pero S no está asignado a ningún elemento A, ya que si suponemos que está asignado a un elemento, por ejemplo x, de A, entonces x sería un elemento de S si, y sólo si, no fuera un elemento de S. Esto es una contradicción. De esta forma, cualquier emparejamiento de diferentes elementos de A con diferentes elementos del conjunto potencia de A deja sin emparejar algún elemento del conjunto potencia de A. Por lo tanto, no existe ninguna correspondencia uno a uno entre A y su conjunto potencia.

2. Queda por mostrar que existe una correspondencia uno a uno entre A y un subconjunto propio del conjunto potencia de A. Esto resulta fácil. Tomemos como subconjunto propio el conjunto de todos los subconjuntos que tienen como único elemento un elemento de A.

Ejemplo. Sea A el conjunto $\{1, 2, 3\}$. Entonces, el conjunto potencia de A es el conjunto.

$$\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \phi\}.$$

A tiene tres elementos. El conjunto potencia de A tiene ocho elementos. No existe ninguna correspondencia uno a uno entre A y su conjunto potencia; pero existe una correspondencia uno a uno entre A y un subconjunto propio de su conjunto potencia: considérese, por ejemplo, el subconjunto $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

El Teorema de Cantor resultaba más o menos obvio para conjuntos finitos. Lo que hizo Cantor fue mostrar que también vale para conjuntos infinitos.

12. Secuencias. Enumeraciones. Enumeraciones efectivas

En matemática, una secuencia es una función de un tipo determinado. Pero nosotros usaremos dicha palabra de una manera intuitiva. Una *secuencia* es una ordenación de objetos, llamados *términos* de la secuencia. Una misma cosa puede aparecer en la ordenación más de una vez; por ejemplo $\langle 1, 2, 3, 1\rangle$ es una secuencia de cuatro términos en la que el número 1 aparece como primer término y como cuarto término. Una secuencia s es idéntica a una secuencia s' sii s y s' tienen exactamente el mismo número de términos y además el primer término de s es el mismo que el primer término de s', el segundo término de s es exactamente el mismo que el segundo término de s', y así sucesivamente. De esta forma, por ejemplo, $\langle 1, 2, 1\rangle \neq \langle 1, 2\rangle$ y $\langle 1, 2, 3\rangle \neq \langle 3, 2, 1\rangle$.

Una secuencia de n términos también recibe el nombre de n-tupla.

Una secuencia puede ser finita o infinita. Una secuencia enumerable es una secuencia que tiene una cantidad enumerable de términos, y que puede simbolizarse escribiendo los primeros términos y, a continuación, puntos suspensivos; por ejemplo, $\langle 1, 2, 3,...\rangle$ y $\langle 1, 1, 1,...\rangle$ y $\langle 1, 2, 1, 2, 1, 2,...\rangle$ y $\langle 4, 9, 13, 5, 5, 5, ..., 5,...\rangle$ son secuencias enumerables. En la última, todos los términos a partir del cuarto son el número 5.

En los ejemplos anteriores, todos los términos de todas las secuencias son números. Pero existen conjuntos que tienen como elementos cosas que no son números, de forma que existirán secuencias que tienen como términos cosas que no son números.

Una *enumeración* de un conjunto A es una secuencia finita o enumerable en la cual cada uno de los elementos de A es un término y cada término es un elemento de A. Por ejemplo, las secuencias $\langle 3, 1, 2\rangle$ y $\langle 1, 2, 3, 1\rangle$ son enumeraciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$.

NOCIONES GENERALES

Una *enumeración efectiva* es una enumeración que es finita o para la cual existe un método efectivo para establecer cuál es su n-ésimo término, para todo entero positivo n. (Toda enumeración finita es efectiva, puesto que existe un método efectivo —recordar que no tiene por qué ser conocido por alguien— para enumerar los elementos de cualquier conjunto finito.)

EJERCICIOS

1. 'Si existe una enumeración con repeticiones de un conjunto A, entonces existe una enumeración sin repeticiones del conjunto A'. ¿Verdadero o falso?

2. (*a*) Si se sustituyera en el ejercicio anterior 'enumeración' por 'enumeración efectiva', en sus dos apariciones, ¿sería verdadero el enunciado resultante?

   (*b*) Si es que existe, describe un método para calcular el término n-ésimo de la nueva enumeración. Si no existe, decir por qué.

RESPUESTAS

1. Verdadero. Basta con borrar las repeticiones.
2. (*a*) Sí.

   (*b*) Calcular el primer término de la antigua secuencia. Colocarlo como primer término de la nueva. Calcular el segundo término de la antigua. Colocarlo como segundo término de la nueva, *a menos que* sea idéntico a un término anterior de la nueva secuencia. Después de cada adición a la nueva secuencia, comprobar cuántos términos hemos puesto en ella. Tarde o temprano tendremos que llegar al n-ésimo término de la nueva secuencia (si es que existe un término n-ésimo), y sabremos entonces que es el n-ésimo término.

13. Teoremas acerca de conjuntos infinitos

13.1 *Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable*

Demostración. Sea A un conjunto numerable cualquiera y sea B un subconjunto cualquiera de A.

(*a*) Si es finito, entonces obviamente B es finito, y por lo tanto será numerable.

(*b*) Si A es enumerable, entonces (por definición) existe una correspondencia uno a uno entre él y el conjunto de los números naturales, y de esta forma existe una secuencia enumerable que enumera A sin repeticiones. Borremos de esta secuencia todos los términos que no son elementos de B, y el resultado será una secuencia finita o enumerable que enumera B sin repeticiones. Por lo tanto, B es numerable.

La *unión* de dos conjuntos A y B [se escribe $A \cup B$] es el conjunto que tiene como elementos suyos todos los elementos de A y todos los elementos de B.

13.2. *La unión de un conjunto enumerable y un conjunto finito es enumerable*

Demostración. Sea A cualquier conjunto enumerable y B cualquier conjunto finito. B tendrá n elementos. Entonces, los elementos de B pueden emparejarse con los n primeros números naturales (esto es, 0, 1, ..., $n-1$), y los elementos de A con los números naturales de n en adelante, borrando primero todos los elementos de A que también son elementos de B.

13.3. *La unión de un conjunto enumerable y un conjunto enumerable es un conjunto enumerable*

Demostración. Tomemos elementos alternadamente de cada uno de los dos conjuntos, borrando todas las repeticiones. Por ejemplo: sea A el conjunto de los números primos, {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...}, y B el conjunto de los números impares, {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...}. Entonces podemos enumerar de la siguiente forma la unión de A y B:

$$\langle 2,\ 1,\ 3,\ \cancel{3},\ 5,\ \cancel{5},\ 7,\ \cancel{7},\ 11,\ 9,\ 13,\ \cancel{11},\ 17,\ \cancel{13},\ 19,\ 15,\ \ldots\rangle$$

Dadas las demostraciones de 13.2 y 13.3, las demostraciones de los dos siguientes teoremas resultan fáciles, y las dejamos al lector:

13.4 *La unión de un conjunto numerable y de un conjunto finito es numerable*

13.5 *La unión de un conjunto numerable y de un conjunto numerable es numerable*

$A - B$ es el conjunto que tiene como elementos todos aquellos elementos de A que no son elementos de B.

13.6 *Si de un conjunto no-numerable quitamos una cantidad numerable de elementos, nos queda un conjunto no-numerable*

Demostración

(*a*) [En el caso de que quitemos una cantidad finita de elementos.] Sea A cualquier conjunto no-numerable, y B cualquier conjunto finito de elementos de A. Supongamos que A – B fuera numerable. Entonces, por 13.4, la unión de A – B con B sería numerable. Pero la unión de A – B con B es el mismo A, y por hipótesis A es no-numerable. De esta forma, A – B debe ser no-numerable.

(*b*) [En el caso de que quitemos enumerablemente muchos elementos.] Sea A cualquier conjunto no-numerable, y B cualquier conjunto enumerable de elementos de A. Supongamos que A – B fuera numerable. Entonces, por 13.5, la unión de A – B con B sería numerable. Pero la unión de A – B con B es el mismo A, y, por hipótesis, A es no-numerable. Así, A – B debe ser no-numerable.

14. Demostración informal de la incompletud de cualquier sistema formal finitista de la teoría no-restringida de los números naturales

Por 'sistema formal finitista' entenderemos un sistema formal con un alfabeto de símbolos que es finito o enumerable, con fbfs de una longitud finita, y con reglas de inferencia (si las hay) que usen sólo una cantidad finita de premisas. (En los últimos años, los lógicos han trabajado sobre sistemas con alfabetos no-numerables, con fbfs infinitamente largas, con reglas de inferencia que tienen infinitamente muchas premisas, etc.)

Un sistema formal de la teoría no-restringida de los números naturales es un sistema formal cuyos teoremas (algunos de ellos, o todos) pueden interpretarse como si expresaran verdades de la teoría no-restringida de los números naturales. Se dice que un sistema de este tipo es *incompleto* si existen verdades de la teoría no-restringida de los números naturales que no son teoremas del sistema [es decir, verdades que no son

expresadas por ningún teorema del sistema, bajo la interpretación propuesta].

Consideramos en este caso que la teoría no-restringida de los números naturales incluye, entre otras cosas, todas las verdades que hacen que un número natural determinado sea elemento de algún conjunto determinado de números naturales. Recordemos que un conjunto A es idéntico a un conjunto B si, y sólo si, A tiene exactamente los mismos elementos que B, y que esta identidad no resulta afectada por diferencias completamente radicales en las especificaciones de A y B. [Por ejemplo, si el único número en el que yo estoy pensando es el número 17, entonces el conjunto de los números en los que yo estoy pensando es idéntico al conjunto cuyo único elemento es el número 17.]

14.1 *Cualquier sistema formal finitista tiene solamente una cantidad numerable de fbfs y, por lo tanto, sólo tiene una cantidad numerable de teoremas*

Demostración

Paso 1. Un alfabeto enumerable no tiene una potencia de expresión mayor que un alfabeto finito, ni siquiera mayor que un alfabeto de dos símbolos. Ya que, supongamos que tenemos un alfabeto enumerable con los símbolos a_1, a_2, a_3, ... Existe entonces una correspondencia uno a uno entre él y el conjunto {10, 100, 1000, ...} de cadenas de símbolos del alfabeto cuyos únicos símbolos son 0 y 1. Y estas cadenas del alfabeto finito pueden usarse para hacer todo lo que pueda ser hecho con los símbolos del alfabeto enumerable.

Paso 2. El conjunto de distintas fbfs de longitud finita que puede obtenerse a partir de un alfabeto finito es numerable. *Demostración.* Reemplacemos cada símbolo del alfabeto por un '1' seguido por una cadena de uno o más ceros, como en el Paso 1. Cada fbf se convierte entonces en un numeral compuesto exclusivamente de unos y ceros, y que comienza por un uno[5]. A cada fbf diferente le corresponde un numeral diferente. Cada uno de estos diferentes numerales ocupa el lugar de un número natural diferente. Existe sólo una cantidad enumerable de números naturales, de forma que existe como máximo una cantidad enumerable de fbfs. Entonces, el conjunto de las fbfs de cualquier sistema formal finitista es numerable. En cualquier sistema formal, todo teorema es una fbf. Luego el conjunto de los teoremas de cualquier sistema formal finitista es también numerable.

14.2 *Existe una cantidad no-numerable de verdades de la teoría no-restringida de los números naturales*

Demostración. A cada uno (de la totalidad no-numerable) de los subconjuntos del conjunto de los números naturales [ver 11.2] le corresponde una verdad diferente de la teoría no-restringida de los números naturales, esto es, la verdad de que cero[6] es (o no es, como puede suceder) un elemento de ese subconjunto. Por lo tanto, existen al menos tantas verdades de la teoría no-restringida de los números naturales como subconjuntos del conjunto de los números naturales y, por lo tanto, existe una cantidad no-numerable de tales verdades.

14.3 *Cualquier sistema formal finitista de la teoría no restringida de los números naturales es incompleto, en el sentido explicado (ver el parágrafo 2 de esta sección)*

Demostración. Por 14.1, cualquier sistema formal finitista de la teoría no-restringida de los números naturales tiene sólo una cantidad numerable de teoremas (formales). Bajo la interpretación propuesta, cada teorema formal tendrá un significado preciso y definido y, si es verdadero bajo la interpretación propuesta, expresará una verdad. Supondremos para mayor simplicidad que, bajo la interpretación propuesta, cada uno de los diversos teoremas expresa una verdad diferente de la teoría no-restringida de los números naturales. [Existen otras posibilidades: por ejemplo, dos teoremas diferentes podrían expresar la misma verdad, o algunos teoremas podrían expresar falsedades, o alguno podría expresar verdades que no fueran verdades de la teoría no-restringida de los números naturales. Una demostración completa, que usara el teorema 13.1, el que establece que todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable, daría cuenta de estas posibilidades.] También, para mayor simplicidad, identificaremos teoremas interpretados con las verdades que ellos expresan. Así tendremos que: todo sistema formal finitista de la teoría no-restringida de los números naturales incluirá entre sus teoremas interpretados sólo una cantidad numerable de verdades de la teoría no-restringida de los números naturales. Pero, por 14.2, existe una cantidad no-numerable de tales verdades. Entonces, por 13.6, ningún sistema formal finitista conseguirá incluir entre sus teoremas interpretados una cantidad no-numerable de tales verdades. Por lo tanto, cualquier sistema formal finitista de la teoría no-restringida de los números naturales es incompleta.

Q.E.D.

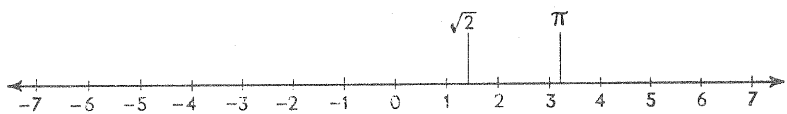
Apéndice 1: Teoría intuitiva de conjuntos infinitos y de números cardinales transfinitos

En lo que sigue las demostraciones son informales y dejamos sin demostrar algunos teoremas. Este material no resulta esencial para el resto del libro.

Consideramos una recta infinita dividida en unidades, tal y como se muestra en la figura de la p. . A cada número racional (es decir, un número que puede ser expresado como una razón de dos enteros) le corresponde un punto de la línea. Pero en la línea hay muchos puntos a los que no corresponde ningún número racional, por ejemplo los puntos señalados mediante $\sqrt{2}$ y π. Ni $\sqrt{2}$ ni π pueden expresarse como una razón de dos enteros. Los números que se corresponden de esta forma con puntos de una línea, pero que no pueden ser expresados como razones de dos enteros son conocidos como *números irracionales.* El conjunto de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales y del conjunto de los números irracionales, y puede ser contemplado como el conjunto de los números que corresponden a los puntos de una línea infinita.

El *continuo* (real) es el conjunto de los números reales, tomados en su orden natural.

El *continuo lineal* es el conjunto de todos los puntos de una línea infinita:



Teorema A1. *El número cardinal del continuo (real) es el mismo que el número cardinal del continuo lineal*

En consecuencia, de ahora en adelante hablaremos simplemente del 'número cardinal del continuo'.

Notación: El número cardinal del continuo es c [la 'c' gótica minúscula].

Teorema A2. *La adición a, o la sustracción de, un conjunto infinito, de una cantidad finita de cosas, proporciona un conjunto con el mismo número cardinal que el conjunto original*

Este teorema es una extensión de 13.2, que sólo hablaba de conjuntos enumerables. A2 alcanza asimismo a conjuntos no-numerables, y su demostración incluye el Axioma de Elección, que cae fuera del alcance de este libro. [Véase, para el Axioma de Elección, la secc. 59.]

Teorema A3. *Si sustraemos de un conjunto no-numerable un conjunto enumerable nos queda un conjunto con el mismo número cardinal que el conjunto no-numerable*

Cfr. 13.6. A3 nos proporciona una imformación más definida que la de B.6 acerca del conjunto resultante.

Teorema A4. *El conjunto de los números reales es no-numerable* [Cantor, 1873]

Demostración. Tres pasos:

1. Cada número real únicamente se puede representar mediante un numeral decimal de longitud infinita. Aquellos números que naturalmente se representarían mediante decimales de longitud finita tienen que representarse mediante numerales equivalentes de longitud infinita: por ej., el número real $3\frac{1}{4}$ mediante 3.24999999..., y no mediante 3.25; el número 1 mediante 0.99999...

2. Nos fijaremos en primer lugar en el conjunto de los números reales mayores que 0 y menores que, o iguales a, 1. Resulta claro que este conjunto no es finito. Supongamos ahora que emparejamos cada uno de los diferentes números naturales con un número real diferente, representado mediante un decimal de longitud infinita. Resulta fácil mostrar, mediante un argumento de la diagonal, que cualquiera de esos emparejamientos deja sin emparejar algún número real, ya que cada uno de esos emparejamientos comenzará así:

0 $\quad 0 \cdot d\,d\,d\,d\,d\,d\,d\ldots$
1 $\quad 0 \cdot d\,d\,d\,d\,d\,d\,d\ldots$
2 $\quad 0 \cdot d\,d\,d\,d\,d\,d\,d\ldots$

en donde cada *d* es un dígito (esto es, un numeral de 0 a 9); quizá todos sean el mismo dígito, o quizá no. Y resulta claro que cualquier numeral obtenido colocando en primer lugar un cero, después un punto decimal, después un dígito diferente del primer *d* de la diagonal (pero no 0), después un dígito diferente del segundo *d* de la diagonal (pero no 0), y así sucesivamente, representará un número real mayor que 0 y menor que, o igual a, 1, que no estará emparejado con ningún número natural. Luego

el conjunto de los números reales mayores que 0 y menores que, o iguales a, 1, es no-numerable.

3. Por el Teorema A2, el conjunto de los números reales mayores que 0 y menores que, o iguales a, 1, tiene el mismo número cardinal que el conjunto de los números reales mayores que 0 y menores que 1, que tiene el mismo número cardinal que el conjunto de los puntos de una línea que tenga una unidad de longitud (quitando los puntos de los extremos). La figura inferior de la p. 53 muestra que existe una correspondencia uno a uno entre este último conjunto y el conjunto de los puntos de una línea infinita, y, por ello, entre él y el conjunto de todos los números reales. Luego el conjunto de los números reales es no-numerable.

Q.E.D.

Puesto que el conjunto de los números naturales es un subconjunto propio del conjunto de los números reales, tenemos como corolario del Teorema A4:

Teorema A5. $\mathfrak{c} > \aleph_0$.

Teorema A6. *Cada uno de los conjuntos siguientes tienen el número cardinal del continuo:*

A. El conjunto de los números reales x *tales que* $0 \leqslant x \leqslant 1$
B. El conjunto de los números reales x *tales que* $0 < x \leqslant 1$
C. El conjunto de los números reales x *tales que* $0 \leqslant x < 1$
D. El conjunto de los números reales x *tales que* $0 < x < 1$
E. El conjunto de los números reales no negativos

Demostración

(Conjuntos *A*, *B*, *C*, *D*) *A* es *B* con algo adicional: el número 0. *C* es *A* con un elemento menos: el número 1. *D* es *C* con un elemento menos: el número 0. Ya hemos demostrado que *B* tiene el número cardinal del continuo [en el desarrollo de la demostración del Teorema A4]. Luego, por el Teorema A2, *A* también lo tiene. Luego, por el Teorema A2 aplicado al resultado obtenido para *A*, *C* también lo tiene. Luego, por A2 aplicado al resultado obtenido para *C*, *D* también lo tiene.

(Conjunto *E*) *E* contiene a *D* como subconjunto propio. Luego si no existe ninguna correspondencia uno a uno entre *E* y *D*, $\overline{\overline{D}} < \overline{\overline{E}}$ (por la definición de $<$ para cardinales transfinitos); y si *existe* una correspondencia uno a uno, $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{E}}$. Pero o bien existe o bien no existe una corres-

pondencia uno a uno entre E y D. Luego $\bar{\bar{D}} \leqslant \bar{\bar{E}}$. De igual manera, $\bar{\bar{E}} \leqslant \bar{\bar{R}}$, donde R es el conjunto de todos los números reales. Pero $\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{R}} = \mathfrak{c}$. Luego tenemos:

$$\mathfrak{c} = \bar{\bar{D}} \leqslant \bar{\bar{E}} \leqslant \bar{\bar{R}} = \mathfrak{c}.$$

Luego $$\mathfrak{c} \leqslant \bar{\bar{E}} \leqslant \mathfrak{c}.$$

Luego $$\bar{\bar{E}} = \mathfrak{c}.$$

(Ofrecemos más adelante una demostración geométrica del mismo resultado: Teorema A8*H*.)

Teorema A7. *El conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales (el conjunto potencia del conjunto de los números naturales) tiene el número cardinal del continuo.*

Demostración

Cada conjunto de números naturales puede representarse únicamente mediante una cadena enumerable de 'Sí' y 'No', como sucede en las tablas de la secc. 11. Por ejemplo, la cadena que comienza:

Sí Sí No No Sí No

y sigue repitiendo siempre el 'No', representa el conjunto $\{0, 1, 4\}$. Luego existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales y el conjunto de cadenas enumerables compuestas por 'Sí' y 'No'. Y existe una correspondencia uno a uno entre este último conjunto y el conjunto de cadenas enumerables compuestas por '1' y '0'. Por ejemplo, la cadena compuesta por 'Sí' y 'No' mencionada anteriormente corresponde a la cadena que comienza

1 1 0 0 1 0

y sigue repitiendo siempre '0'.

Si colocamos el equivalente binario de un punto decimal delante de una cadena enumerable formada por '1' y '0', obtendremos una expresión que, en el sistema binario, denota un número real $\geqslant 0$ y $\leqslant 1$. Por ejemplo, la expresión que comienza

$\cdot 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0$

y sigue repitiendo siempre '0' denota el número real

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{0}{8}+\frac{0}{16}+\frac{1}{32}+\frac{0}{64}+0$$

es decir, el número real $\frac{25}{32}$. Cada cadena enumerable compuesta por '1' y '0', precedida de un punto binario, representa un número real $\geqslant 0$ y $\leqslant 1$, y cada número real $\geqslant 0$ y $\leqslant 1$ se representa mediante alguna cadena. Pero no se trata de una correspondencia uno a uno, puesto que algunos números se representan mediante más de una cadena. Por ejemplo, el número $\frac{1}{4}$ se representa tanto mediante

$$\cdot 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots$$

como mediante

$$\cdot 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \ldots$$

Sin embargo, si quitamos del conjunto de cadenas el conjunto de todas las cadenas que, desde algún punto determinado en adelante, constan sólo de repeticiones de '0', *existiría* una correspondencia uno a uno entre el conjunto de las cadenas que quedan y el conjunto de los números reales >0 y $\leqslant 1$. Pero puede *enumerarse* el conjunto de todas las cadenas enumerables compuestas de '1' y '0' que, desde algún punto determinado en adelante, constan sólo de repeticiones de '0' (dejamos la demostración correspondiente como un ejercicio para el lector). Y sustraer un conjunto enumerable de un conjunto no-numerable nos deja con un conjunto que tiene la misma cardinalidad que el conjunto no-numerable [Teorema A3]. Luego, usando '$\simeq$' como símbolo para 'guarda una correspondencia uno a uno con', tenemos que:

> El conjunto de los subconjuntos del conjunto de los números naturales $\simeq$ El conjunto de cadenas enumerables compuestas por 'Sí' y 'No' $\simeq$ El conjunto de cadenas enumerables compuestas por '1' y '0' $\simeq$ El conjunto de cadenas enumerables compuestas de '1' y '0', y que no son aquellas cadenas que, desde un punto determinado en adelante, consisten repetidamente en '0'$\simeq$. El conjunto de los números reales >0 y $\leqslant 1\simeq$. El conjunto de los números reales.

Luego el conjunto de los subconjuntos del conjunto de los números naturales tiene el número cardinal del continuo.

Q.E.D.

Teorema A8. *Cada uno de los siguientes conjuntos tiene el número cardinal del continuo:*

F. El conjunto de puntos de una recta que tiene una unidad cualquiera de longitud.

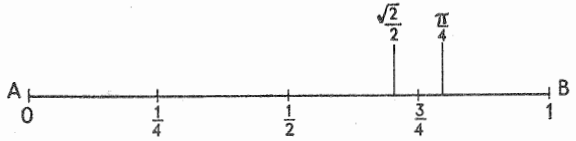
G. El conjunto de puntos de una recta que tiene dos unidades cualesquiera de longitud.

H. El conjunto de puntos de la semirrecta (infinita).

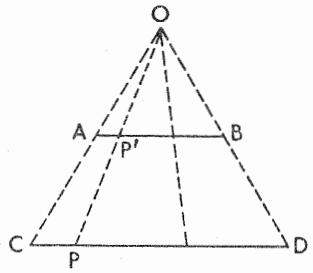
I. El conjunto de puntos de la semirrecta (infinita).

Demostración

F. Usamos el Teorema *A6A* y la ya familiar correspondencia uno a uno ilustrada mediante la figura (sea *AB* una unidad cualquiera de longitud):



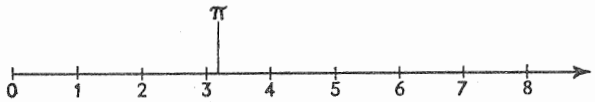
G. Podemos construir una demostración haciendo que la recta *AB* de la demostración de *F* tenga dos unidades de longitud. Más intuitiva es la siguiente demostración geométrica:



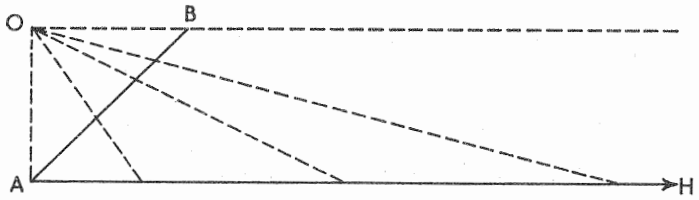
A cada punto de la recta de dos unidades de longitud, *CD*, le corresponde un único punto de la recta de una unidad de longitud, *AB*, y viceversa. Por ejemplo, al punto *P* de *CD* le corresponde el punto único *P'* de *AB*, y viceversa.

H. Podemos construir una demostración mediante la ya conocida correspondencia uno a uno entre el conjunto de puntos de la semirrecta

(infinita) y el conjunto de los números reales no negativos (ya hemos mostrado que tiene el cardinal c: Teorema A6*E*):

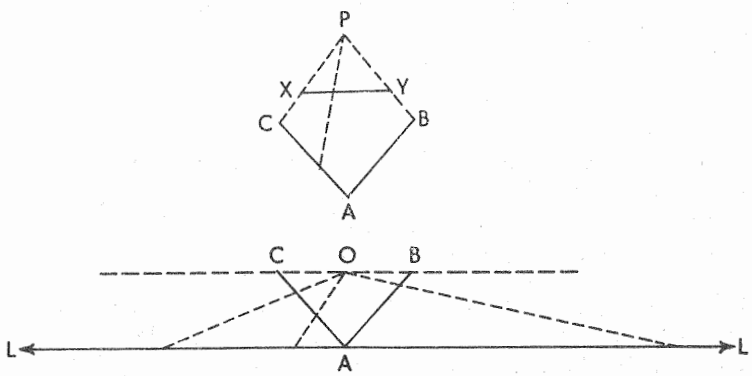


Hay otra demostración de carácter geométrico:



Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de la semirrecta infinita AH y los puntos de AB distintos de B (ningún punto de AH corresponde al punto B, ya que OB es paralela a AH). Por el Teorema A2, el número de puntos de AB es el mismo que el número de puntos de AB distintos de B. Luego existe el mismo número de puntos en la semirrecta infinita que en una recta finita.

I. Ya lo hemos demostrado (Teorema A1). También podría demostrarse mediante las dos figuras siguientes, por ejemplo, con la ayuda del Teorema A8*F* [tenga XY una unidad de longitud] y A2 [el número de puntos de la recta que forma ángulo CAB es el mismo que el número de puntos de CAB que no sean B ni C]:



En la recta de una unidad de longitud XY existe el mismo número de puntos que en la recta que forma ángulo CAB, y también hay el mismo número de puntos en CAB que en L [usando el Teorema A2].

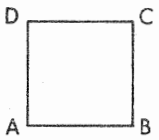
Teorema A9. *Cada uno de los conjuntos siguientes tiene el número cardinal del continuo:*

J. El conjunto de todos los puntos de un cuadrado [*Cantor*, 1877].
K. El conjunto de todos los puntos de un cubo.
L. El conjunto de todos los puntos de un plano infinito.
M. El conjunto de todos los puntos de un espacio euclidiano tridimensional infinito.

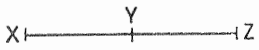
Demostración

J. Cuatro pasos:

1. Sea $ABCD$ un cuadrado cuyos lados tienen una unidad cualquiera de longitud:



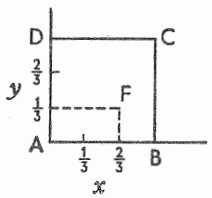
Vamos a fijarnos solamente en los puntos del cuadrado que no están en los lados AB o AD. Si podemos mostrar que el conjunto de esos puntos del cuadrado tiene el número cardinal $\mathfrak{c}$, entonces la unión de ese conjunto con el conjunto de todos los puntos de AB también tendrá el número cardinal $\mathfrak{c}$. Puesto que la unión de dos conjuntos cada uno de los cuales tiene el número cardinal del continuo, tiene el número cardinal del continuo. [Como ilustración, consideremos una recta con una longitud de dos unidades]:



El conjunto de los puntos de XY tiene el número cardinal $\mathfrak{c}$. El conjunto de los puntos de YZ tiene el número cardinal $\mathfrak{c}$. La unión de esos conjuntos es el conjunto de todos los puntos de XZ, que también tiene el número cardinal $\mathfrak{c}$. Luego $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.]

En los pasos 2, 3 y en la mayor parte del 4, que vienen a continuación, escribiremos en aras de la brevedad, 'punto del cuadrado' para significar 'punto del cuadrado que no está en AB ni en AD'.

2. La primera idea básica de la demostración es que cualquier punto del cuadrado *ABCD* corresponde a un par de decimales que no tienen fin, que denotan números reales >0 y $\leqslant 1$, esto es, los números que son las coordenadas cartesianas del punto cuando tomamos como ejes *AB* y *AD*:



En nuestra ilustración, las coordenadas de *F* son x = 0.6666 ..., y = 0.3333 ...

3. La segunda idea básica consiste en reducir esos dos decimales sin fin a un único decimal sin fin, intercalando sus dígitos. En nuestra ilustración, el nuevo decimal será 0.6363636363... Luego a cada punto distinto del cuadrado le corresponde un decimal sin fin distinto que denota un número real >0 y $\leqslant 1$.

4. Pero hay algunos decimales sin fin que no se separan en dos decimales sin fin: todos aquellos decimales en los que el dígito 0 aparece infinitas veces de forma alternada a partir de un punto determinado: por ej., 0.6360606060606060..., que se separa en 0.6666... y 0.3. Los decimales que tienen un fin no admiten la correspondencia que hemos establecido en el Paso 2. Por lo tanto, no hemos obtenido todavía una correspondencia uno a uno entre los puntos del cuadrado y los decimales sin fin que denotan números reales >0 y $\leqslant 1$: a cada punto distinto del cuadrado le corresponde un distinto decimal sin fin que denota un número real >0 y $\leqslant 1$, pero no viceversa. Para enfrentarnos con esta complicación necesitamos la tercera idea básica de la demostración. Al retroceder desde el decimal único hasta el par de decimales tomamos alternadamente los dígitos únicos, igual que antes, *a menos que* el dígito sea un cero: si es un cero, tomamos el *grupo* de dígitos que comienza por cero y acaba en el primer dígito que no es cero. Así

$$0.6\,|\,3\,|\,6\,|\,06\,|\,06\,|\,06|...$$

se separa en

$$0.660606$$

y

$$0.30606$$

Evitamos de esta forma los decimales que tienen un fin y obtenemos nuestra correspondencia uno a uno entre el conjunto de los puntos del cuadrado (distintos de los puntos de AB o AD) y el conjunto de todos los decimales sin fin que denotan números reales >0 y $\leqslant 1$. Sabemos ya que este último conjunto tiene el número cardinal $\mathfrak{c}$. Teniendo en cuenta las indicaciones del Paso 1, se sigue que el conjunto de *todos* los puntos del cuadrado tiene el número cardinal $\mathfrak{c}$.

Q.E.D.

(Pueden verse indicaciones acerca de la dificultad que Cantor tuvo para obtener este resultado en Fraenkel (1961, p. 103).

K. Igual que en el caso de *J*, pero entrelazando *tres* decimales sin fin que denotan las coordenadas del punto en el cubo (tridimensional).

L. Pensemos en el plano como si se tratara del tablero de ajedrez infinito de la secc. 10, ejercicio 3, del que habíamos mostrado que sólo tenía una cantidad enumerable de cuadrados de dos centímetros. Ya hemos visto que la unión de dos conjuntos, cada uno de los cuales tiene el número cardinal $\mathfrak{c}$, tiene el número cardinal $\mathfrak{c}$ (Demostración del Teorema A9*J*, Paso 1). Luego la unión de n conjuntos, cada uno de los cuales tiene el número cardinal $\mathfrak{c}$ tendrá también el número cardinal $\mathfrak{c}$. Y lo mismo se puede decir de la unión de una cantidad enumerable de conjuntos cada uno de los cuales tiene el número cardinal $\mathfrak{c}$. [Como ilustración, consideremos la recta infinita dividida en segmentos de una unidad:

Existe una cantidad enumerable de segmentos cada uno de los cuales tiene $\mathfrak{c}$ puntos. Luego la recta tiene $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}$ puntos. Luego $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.]El plano consta de una cantidad enumerable de cuadrados de dos centímetros, y el número de puntos es, por lo tanto, $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}$, que es $\mathfrak{c}$. Luego existe el mismo número de puntos en un plano que en, por ejemplo, una recta de dos centímetros.

M. Como sucede en el caso de *L*, pero esta vez con cubos de dos centímetros, y en vez de adoptar una sencilla ruta en espiral bidimensional, tomaremos una ruta tridimensional más complicada.

Las demostraciones que siguen a continuación pueden acortarse utilizando los siguientes teoremas de la aritmética de los cardinales transfinitos:

Teorema A10. $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Demostración. Cfr. secc. 10, respuesta al ejercicio 5.

Teorema A11. $\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^3 = \cdots = \mathfrak{c}^n$, *donde n es cualquier entero positivo*

Demostración. Considérese el resultado A9*J* para $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$. (El número del conjunto de todos los puntos de un cuadrado es el producto del número de puntos de un lado y el número de puntos de un lado adyacente al primero $= \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.) Considérese A9*K* para $\mathfrak{c}^3 = \mathfrak{c}$. Y así sucesivamente.

Teorema A12. *Si un conjunto tiene el número cardinal finito n, entonces su conjunto potencia tiene el número cardinal finito* 2^n

Ilustración:

		Elementos del conjunto		
		1	2	3
	1. {1, 2, 3}	Si	Si	Si
	2. {2, 3}	No	Si	Si
	3. {1, 3}	Si	No	Si
Subconjuntos	4. {3}	No	No	Si
del	5. {1, 2}	Si	Si	No
conjunto	6. {2}	No	Si	No
	7. {1}	Si	No	No
	8. El conjunto vacío, ϕ	No	No	No

Teorema A13. (Generalización de A12 para cardinales transfinitos.)[7] *Si un número tiene el número cardinal transfinito* α, *entonces su conjunto potencia tiene el número cardinal transfinito* 2^α.

Teorema A14. $2^\alpha > \alpha$, *para cada número cardinal transfinito* α.

Demostración. A partir del Teorema de Cantor (demostrado en la secc. 11) y del Teorema A13.

Teorema A15. *El conjunto potencia del conjunto de los números naturales tiene el número cardinal* $2^{\aleph_0}$.

Demostración. A partir de A13 y de la definición de $\aleph_0$.

Teorema A16. $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. A partir de A7 y de A15.

Teorema A17. *El conjunto de todos los puntos en un espacio* $\aleph_0$ *— dimensional tiene el número cardinal del continuo.*

Demostración. El conjunto de todos los puntos de (por ejemplo) el espacio tridimensional tiene el número $\mathfrak{c}^3$. El conjunto de todos los puntos

del espacio $\aleph_0$-dimensional tiene el número $\mathfrak{c}^{\aleph}$. Entonces, 'de un plumazo' (Cantor) obtenemos:

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}\ [A16]=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}\ [A10]=\mathfrak{c}.$$

O, en otras palabras: el número de puntos de un espacio infinito de $\aleph_0$ dimensiones es el mismo que el número de puntos de una recta con una longitud de dos billonésimas de centímetro.

Cantor conjeturó que no existe ningún número cardinal α tal que $\aleph_0<\alpha<\mathfrak{c}$. Esta conjetura se conoce por el nombre de *Hipótesis del continuo. No existe ningún número cardinal mayor que* $\aleph_0$ *ni más pequeño que* $\mathfrak{c}$ $[2^{\aleph_0}]$.

En 1938, Kurt Gödel mostró que la hipótesis del continuo no podía ser refutada a partir de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos, y en 1963, Paul Cohen mostró que no podía ser demostrada a partir de ninguno de ellos. La Hipótesis del Continuo resulta, así, *independiente* de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos. (Estos resultados están sometidos a la hipótesis de que los axiomas usuales de la teoría de conjuntos son consistentes. Hasta ahora nadie ha demostrado que lo sean, pero mucho menos especialistas piensan que lo son.)

Hipótesis Generalizada del Continuo (que implica la Hipótesis del Continuo). *Para cada número cardinal transfinito* α, *no existe ningún número cardinal mayor que* α *y más pequeño que* 2^{α}.

EJERCICIO

¿Existen conjuntos que tengan un número cardinal mayor que $\mathfrak{c}$?

RESPUESTA

Sí, suponiendo el Axioma del Conjunto Potencia [es decir, el axioma que establece que para cada conjunto existe su conjunto potencia]. Por ejemplo, el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números reales tiene el número cardinal $2^{\mathfrak{c}}$, que es mayor que $\mathfrak{c}$. El conjunto potencia del conjunto potencia del conjunto de los números naturales tiene también el número cardinal $2^{\mathfrak{c}}$. El conjunto potencia de estos conjuntos tiene el número cardinal $2^{(2^{\mathfrak{c}})}$ que es todavía mayor, y así sucesivamente.

NOTAS A LA PRIMERA PARTE

[1] En la Segunda Parte restringimos la noción de interpretación a interpretaciones para las cuales cada fórmula es verdadera o falsa. En la Tercera Parte existe una restricción análoga.

[2] Al menos en un sentido clásico de 'modelo', que es el que seguimos en este libro. En la Tercera Parte mencionaremos otro sentido, estrechamente relacionado con el nuestro.

[3] Hablando en sentido estricto, esto vale sólo bajo el supuesto del Axioma de Elección, que es un axioma que se hace valer por sí mismo tanto por su plausibilidad intuitiva como porque 'tiene aplicaciones tan importantes en prácticamente todas las ramas de la matemática que no aceptarlo parecería un defecto intencionado del matemático práctico' (Mendelson, 1964, p. 201). [Para el Axioma de Elección, ver la secc. 59.]

[4] Un *número racional* es un número que puede expresarse como una proporción (*razón*, *ratio*) de dos enteros, $\frac{a}{b}$ en donde $b \neq 0$: por ej., $\frac{1}{2}, \frac{39}{17}, -15 \left[= \frac{-15}{1} \right]$.

[5] Por ej., supongamos que el alfabeto consta de cuatro símbolos

$$P \subset ( )$$

Reemplacémoslos en cualquier fbf respectivamente por

10 100 1000 10000

Entonces (por ej.) la fbf

$$(p \supset p)$$

se convierte en

1000101001010000

[6] No sucede en este caso nada peculiar con el cero; cualquier otro número natural serviría de igual modo.

[7] La justificación del Teorema A13 es más complicada de lo que sugiere esta indicación: véase, por ej., Fraenkel (1961, cap. II, secc. 7).

SEGUNDA PARTE

Lógica proposicional veritativo-funcional

La lógica proposicional veritativo-funcional es la teoría de (1) aquéllas verdades lógicas que pueden expresarse utilizando solamente variables proposicionales sin analizar y conectivas proposicionales veritativo-funcionales, y (2) principios de inferencia que relacionan cosas que pueden expresarse mediante dichos medios.

Una *proposición* (tal y como se usa dicha palabra en este libro; otros la definen de diferente manera) es una oración que expresa algo verdadero o falso. Es una cosa abstracta; sus manifestaciones son cadenas de palabras.

15. Funciones

Una función es una *relación* que satisface ciertas condiciones. (Una función es algo abstracto. No hay que identificarla con ninguna expresión lingüística. Por ejemplo, existe una cantidad no-numerable de funciones, mientras que sólo existe una cantidad numerable de expresiones lingüísticas actuales o posibles.)

Para mayor simplicidad nos limitaremos de momento a *funciones de un argumento* y a *relaciones de dos términos.*

El *dominio* de una relación de dos términos es el conjunto de todas las cosas que guardan esa relación respecto a otra cosa. El *rango* de una relación de dos términos es el conjunto de todas las cosas respecto a las cuales otra cosa mantiene esa relación.

Ejemplo 1. El dominio de la relación *ser marido de* es el conjunto de todos los maridos; su rango es el conjunto de todas las esposas.

Definición. Una *función de un argumento* es una relación de dos términos que asigna a cada elemento de su dominio *un elemento de su rango, y sólo uno.*

Ejemplos:

2. La relación de dos términos *ser marido de* no es una función, ya que en algunos países un marido puede tener más de una esposa. Por el contrario, la relación *estar casado monogámicamente con* es una función.

3. La relación f que tiene como dominio suyo el conjunto de los enteros positivos, y como rango el conjunto de los números pares, y que se define mediante la regla

$$f(x) = 2x$$

es una función. (A cada entero positivo se le asigna un número y sólo uno, que es el producto de 2 y el entero dado.)

4. La relación de *tener como padre* (donde padre = padre bioló-

gico humano) es una función. Todo lo que tiene un padre tiene uno, y sólo uno. Dos o más cosas pueden tener el mismo padre, pero esto no impide que la relación sea una función. Lo que importa es que a ningún elemento del dominio se le asigne más de un elemento del rango.

Damos ejemplos para mostrar qué es lo que se quiere decir mediante '*una función de n argumentos*'.

5. La función g definida por la regla

$$g(x,\ y)=x+y$$

es una función de *dos* argumentos.

6. La función h definida por la regla

$$h(x,\ y,\ z)=(x,\ y)+z$$

es una función de *tres* argumentos.

7. La función j definida por la regla

$$j(x,\ y)=(x^2+y)^x$$

es una función de dos argumentos.

Por lo tanto, una *función de n argumentos* ($n>1$) es una función cuyo dominio es un conjunto de *secuencias de n-términos* o *n-tuplas*. Si identificamos una cosa con la secuencia de la cual dicha cosa es el único término, también podemos hablar, como lo hemos estado haciendo, de una función de *un* argumento.

8. La función k definida por la regla

$$k(x)=x+1$$

es una función de un argumento.

'Argumentos' y 'valores' de una función

'Argumentos' y 'valores' se usan de la siguiente forma:

Consideremos la función m definida mediante la regla

$$m(x,\ y)=x\cdot y$$

y que tiene como dominio el conjunto de pares ordenados (secuencias de dos términos) de números naturales, y como rango el conjunto de los números naturales. Para los argumentos $x=3$, $y=4$ esta función tiene el valor 12. Para los argumentos $x=15$, $y=0$ esta función tiene el valor 0. Luego el conjunto de los valores de una función es simplemente el

rango de la función. Un *argumento* de una función es un término de una secuencia que pertenece al dominio de la función. Luego el conjunto de los argumentos de una función no coincide con el dominio de la función, salvo en el caso de las funciones de un argumento.

Se dice que una función cuyos argumentos y valores son números naturales es una función de números naturales a números naturales.

Definición. f es la misma función que g

De la misma forma que un conjunto A es el mismo conjunto que un conjunto B si, y sólo si, tiene exactamente los mismos elementos que B, sin tener en cuenta la forma en que se especifiquen o describan dichos elementos, *una función f es la misma función que una función g* si, y sólo si

(1) *f* y *g* tienen el mismo dominio

y

(2) *f* y *g* tienen el mismo valor para la misma *n*-tupla de argumentos, para cada *n*-tupla del dominio.

Esto equivale a decir que una función *f* y una función *g* pueden ser la misma función aunque sean descritas en términos muy diferentes. Todo lo que hay que tener en cuenta para la identidad de *f* y *g* es (1) la identidad de sus dominios, y (2) la identidad de las cosas escogidas por *f* y *g* para cada elemento del dominio.

16. Funciones de verdad

A la verdad y a la falsedad las llamamos *valores de verdad* (y en este libro no admitimos que ninguna otra cosa sea un valor de verdad). 'V' denota el valor de verdad (o valor veritativo) verdad; 'F' denota el valor veritativo falsedad.

Definición. Una función de verdad es una función cuyo dominio es un conjunto de secuencias de valores de verdad, y cuyo rango es un subconjunto del conjunto de los valores de verdad, es decir, el conjunto {*V, F*}. En otras palabras:

Una función de verdad es una función cuyos argumentos y valores son valores de verdad.

Ejemplos:

1. La función *q*, que tiene como dominio el conjunto de todas las secuencias de dos términos, que pertenecen al conjunto {V, F},

que tiene como rango el conjunto {V, F}, y que se define mediante la regla

$$\begin{cases} q(\mathrm{V},\ \mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ q(\mathrm{F},\ \mathrm{V}) = \mathrm{F} \\ q(\mathrm{V},\ \mathrm{F}) = \mathrm{F} \\ q(\mathrm{F},\ \mathrm{F}) = \mathrm{F} \end{cases}$$

es una función de verdad, la *conjunción.*

2. La función *r* que tiene como valores de verdad argumentos y valores, y que se define mediante la regla

$$\begin{cases} r(\mathrm{V},\ \mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ r(\mathrm{F},\ \mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ r(\mathrm{V},\ \mathrm{F}) = \mathrm{F} \\ r(\mathrm{F},\ \mathrm{F}) = \mathrm{V} \end{cases}$$

es una función de verdad, la *implicación material.*

3. La función *s* que tiene valores de verdad como argumentos y valores, y que se define mediante la regla

$$\begin{cases} s(\mathrm{V}) = \mathrm{F} \\ s(\mathrm{F}) = \mathrm{V} \end{cases}$$

es una función de verdad, la *negación.*

4. La función *t* que tiene valores de verdad como argumentos y valores, y que se define mediante la regla

$$\begin{cases} t(\mathrm{V},\ \mathrm{V},\ \mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ t(\mathrm{F},\ \mathrm{V},\ \mathrm{V}) = \mathrm{F} \\ t(\mathrm{V},\ \mathrm{F},\ \mathrm{V}) = \mathrm{F} \\ t(\mathrm{F},\ \mathrm{F},\ \mathrm{V}) = \mathrm{F} \\ t(\mathrm{V},\ \mathrm{V},\ \mathrm{F}) = \mathrm{F} \\ t(\mathrm{F},\ \mathrm{V},\ \mathrm{F}) = \mathrm{F} \\ t(\mathrm{V},\ \mathrm{F},\ \mathrm{F}) = \mathrm{F} \\ t(\mathrm{F},\ \mathrm{F},\ \mathrm{F}) = \mathrm{F} \end{cases}$$

es una función de verdad, la conjunción otra vez, pero esta vez se trata de la conjunción de *tres* componentes.

Respecto a las funciones de verdad lo más importante es comprender que se trata de relaciones entre *secuencias de valores de verdad* y *valores de verdad. Ninguna otra cosa es importante.* Así, por ejemplo, las relaciones veritativo-funcionales entre proposiciones son relaciones *simplemente entre los valores de verdad de las proposiciones afectadas.* Los significados

de las proposiciones sólo se tienen en cuenta desde el punto de vista de que, si una proposición ha de ser verdadera o falsa, ha de tener algún significado. Pero para determinar si una proposición está en una determinada relación veritativo-funcional respecto a otra, no necesitamos saber qué significan esas proposiciones: basta con saber sus valores de verdad (y a veces ni siquiera necesitamos saber cuáles son sus valores de verdad: puede que sea suficiente saber *que* tienen valores de verdad, es decir, que son proposiciones en el sentido definido).

Definición. Una *conectiva proposicional veritativo-funcional* es un símbolo o expresión significativa que puede combinarse con proposiciones (o fórmulas) para formar proposiciones (o fórmulas) y que puede definirse completamente mediante una clásica tabla de verdad completa (es decir, mediante una tabla en la cual, para cada fila de la tabla, la columna final establece un único valor de verdad definido)[1].

Ejemplo: El símbolo '$\supset$' es una conectiva proposicional veritativo-funcional. Puede definirse completamente mediante la siguiente tabla de verdad:

A	B	A $\supset$ B
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

(El orden en el que se escriben las cuatro filas carece de importancia.)

Cada conectiva proposicional veritativo-funcional corresponde a una sola función de verdad, en la forma que ilustramos a continuación:

A la conectiva '$\supset$' le corresponde la función

$$\begin{cases} q(\mathrm{V},\ \mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ q(\mathrm{F},\ \mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ q(\mathrm{V},\ \mathrm{F}) = \mathrm{F} \\ q(\mathrm{F},\ \mathrm{F}) = \mathrm{V} \end{cases}$$

es decir, la implicación material.

(El orden en el que se escriben las cuatro filas carece de importancia.)

Una conectiva monádica es una conectiva que se combina con *una* proposición o fórmula para formar otra nueva; una conectiva diádica, o

binaria, es una conectiva que se combina con *dos* proposiciones (fórmulas) para formar otra nueva; y así sucesivamente. '$\sim$' es una conectiva monádica; '$\supset$', '$\wedge$' y '$\vee$' son conectivas diádicas (binarias)[2]. No existe ninguna conectiva triádica que resulte familiar, puesto que (como mostraremos) todo lo que puede expresarse mediante conectivas triádicas o todavía más complicadas puede expresarse utilizando sólo conectivas diádicas.

Existen $2^2 = 4$ funciones de verdad totales[2 bis] de un argumento:

$$\begin{cases} f_1(\mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ f_1(\mathrm{F}) = \mathrm{V} \end{cases} \quad \text{[Sin nombre]}$$

$$\begin{cases} f_2(\mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ f_2(\mathrm{F}) = \mathrm{F} \end{cases} \quad \text{[Identidad]}$$

$$\begin{cases} f_3(\mathrm{V}) = \mathrm{F} \\ f_3(\mathrm{F}) = \mathrm{V} \end{cases} \quad \text{[Negación]}$$

$$\begin{cases} f_4(\mathrm{V}) = \mathrm{F} \\ f_4(\mathrm{F}) = \mathrm{F} \end{cases} \quad \text{[Sin nombre]}$$

Existen $(2^2)^2 = 16$ funciones de verdad de dos argumentos, por ejemplo:

$$\begin{cases} g_1(\mathrm{V},\ \mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ g_1(\mathrm{F},\ \mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ g_1(\mathrm{V},\ \mathrm{F}) = \mathrm{V} \\ g_1(\mathrm{F},\ \mathrm{F}) = \mathrm{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_2(\mathrm{V},\ \mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ g_2(\mathrm{F},\ \mathrm{V}) = \mathrm{V} \\ g_2(\mathrm{V},\ \mathrm{F}) = \mathrm{V} \\ g_2(\mathrm{F},\ \mathrm{F}) = \mathrm{F} \end{cases} \quad \text{etc.}$$

Existen $((2^2)^2)^2 = 16^2 = 256$ funciones de verdad de tres argumentos. Existen $2^{(2^m)}$ funciones de verdad de m argumentos.

Para cada entero positivo n, existe un número finito de diferentes funciones de verdad de n argumentos. Luego el conjunto de todas las funciones de verdad es enumerable.

¿Necesitamos una cantidad enumerable de conectivas para expresar la cantidad enumerable de funciones de verdad? Veremos más adelante que la respuesta es 'No'. Todas ellas pueden expresarse mediante una sola conectiva diádica.

EJERCICIOS

1. Dar una regla que defina la función de verdad de tres argumentos que tiene el valor verdad cuando el segundo argumento tiene el valor verdad, y el valor falsedad en caso contrario.

2. ¿Cuáles de las conectivas siguientes son (en su contexto) conectivas proporcionales veritativo-funcionales?

(*a*) 'No es el caso que , en la oración 'No es el caso que Napoleón ganó la batalla de Waterloo'.
(*b*) 'Y' en '2+2=4 y Napoleón ganó la batalla de Waterloo'.
(*c*) 'Y después' en 'Se quitó la ropa y después se tiró al agua'.
(*d*) 'Hunter cree que' en 'Hunter cree que Napoleón ganó la batalla de Waterloo'.
(*e*) 'Si' en 'Si Tomás se casa con María, Susana se apenará'.
(*f*) 'O..., o...' en '2+2=4, luego o 2+2=4, o existe vida en Marte'.
(*g*) 'O..., o...' en 'O cogió el autobús, o tuvo que caminar'.
(*h*) 'Si' en 'Si él es millonario, yo soy holandés'.

RESPUESTAS

1. Sea g esa función. Entonces la regla es

$$\begin{cases} g(\mathrm{V},\ \mathrm{V},\ \mathrm{V})=\mathrm{V} \\ g(\mathrm{F},\ \mathrm{V},\ \mathrm{V})=\mathrm{V} \\ g(\mathrm{V},\ \mathrm{F},\ \mathrm{V})=\mathrm{F} \\ g(\mathrm{F},\ \mathrm{F},\ \mathrm{V})=\mathrm{F} \\ g(\mathrm{V},\ \mathrm{V},\ \mathrm{F})=\mathrm{V} \\ g(\mathrm{F},\ \mathrm{V},\ \mathrm{F})=\mathrm{V} \\ g(\mathrm{V},\ \mathrm{F},\ \mathrm{F})=\mathrm{F} \\ g(\mathrm{F},\ \mathrm{F},\ \mathrm{F})=\mathrm{F} \end{cases}$$

2. Las conectivas de (*a*), (*b*) y (*f*) son conectivas proposicionales veritativo-funcionales. Las restantes, no.

(*a*) 'No es el caso que' puede definirse completamente mediante la tabla de verdad

A	No es el caso que A
V	F
F	V

(*b*) Este 'y' puede definirse completamente mediante la tabla de verdad

A	B	A y B
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

(*c*) Si intentamos construir una tabla de verdad para 'y después' descubriremos que el valor de verdad de una fila queda sin determinar:

A	B	A y después B
V	V	?
F	V	F
V	F	F
F	F	F

(*d*) En este caso quedan sin determinar los valores de ambas filas:

A	Hunter cree que
V	?
F	?

(*e*) Quedan sin determinar los valores de tres filas

A	B	Sí A, entonces B
V	V	?
F	V	?
V	F	F
F	F	?

(*f*) Este uso veritativo-funcional (o 'extensional') de 'o..., o...' puede definirse completamente mediante la tabla de verdad

A	B	o A o B
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

(*g*) Este es un uso no-veritativo-funcional (o 'intensional') de 'o..., o...'. La oración entera equivale a 'Si no cogió el autobús, entonces tuvo que caminar', y precisamente como sucedía en el Caso (*e*), quedan sin determinar los valores de tres filas:

A	B	o A o B =	Si no A, entonces B
V	V	?	?
F	V	?	?
V	F	?	?
F	F	F	F

Ver además Strawson (1952, p. 90).

(*h*) Sucede lo mismo que en Caso (*e*). Cfr. Strawson (1952, p. 89).

17. Un lenguaje formal para la lógica proposicional veritativo-funcional: el lenguaje formal P

Definimos ahora un lenguaje formal que será capaz, bajo la interpretación adecuada, de expresar verdades de la lógica proposicional veritativo-funcional. Pero nuestra definición no hará ninguna referencia esencial a esa interpretación ni a ninguna otra. Los términos 'símbolo proposicional', 'conectiva', 'paréntesis' que se usan para describir el lenguaje *hay que considerarlos por lo tanto meramente como etiquetas convenientes*, se describen teniendo a la vista, ciertamente, la interpretación propuesta, pero son susceptibles de ser reemplazadas por cualquier conglomerado de letras, como 'schlumpf', 'torticiego' o 'zbarg'. Daremos a este lenguaje el nombre de lenguaje 'P' (por 'lógica proposicional').

El lenguaje formal P

Símbolos de P

P tiene seis símbolos:

$$p' \quad \sim \quad \supset \quad (\quad)$$

Nombres de estos símbolos:

El símbolo p
El acento
La tilde
La herradura
El paréntesis izquierdo
El paréntesis derecho

A la tilde y a la herradura les daremos el nombre de *conectivas* de P.

Diremos que el símbolo p seguido de uno o más acentos es un *símbolo proposicional* de P. Así, cada una de las (expresiones) siguientes es un símbolo proposicional de P:

$$p'$$
$$p''$$
$$p'''$$
$$p''''$$

Fórmulas (fbfs) de P

1. Todo símbolo proposicional es un fbf de P.
2. Si A es un fbf de P, entonces la cadena de símbolos de P que consta de una tilde seguida de la fórmula A es una fbf de P. (Abreviamos esto diciendo: Si A es un fbf de P, $\sim$A es una fbf de P.)
3. Si A y B son fbfs de P, entonces la cadena de símbolos de P formada por el paréntesis izquierdo, la fórmula A, la herradura, la fórmula B, y el paréntesis derecho, en ese orden, es una fbf de P. (Lo abreviamos: Si A y B son fbfs de P, entonces (A $\supset$ B) es una fbf de P.)
4. Ninguna otra cosa es una fbf de P.

[En esta descripción, las letras 'A' y 'B' son variables metalingüísticas.]

Ejemplos: Las (expresiones) siguientes son fbfs de P:

$$p'''''$$
$$\sim p''$$
$$(p''' \supset p')$$
$$\sim(p''' \supset p')$$
$$(\sim \sim(p''' \supset p') \supset \sim p'')$$

Las (expresiones) siguientes *no* son fbfs de P:

p	[No hay acento]
$\sim(p'')$	[Sobran los paréntesis]
$(\sim p'')$	[Sobran los paréntesis]
$p''' \supset p'$	[No hay paréntesis]
q''	['q' no es un símbolo de P]
$(p \supset q)$	[Obvio]
$(A \supset B)$	['A' y 'B' no son símbolos de P]

18. Convenciones: 1. Uso de comillas. 2. Eliminación de paréntesis

Si seguimos estrictamente los requisitos que nosotros mismos hemos establecido acerca del uso de comillas y de paréntesis, el resto de este libro resultaría incluso menos legible de lo que ya resulta[3]. Por ello, de ahora en adelante adoptaremos las convenciones siguientes:

1. *Uso de comillas*

Hay que considerar cada símbolo o fórmula como un nombre o descripción de sí mismo, si el contexto así lo requiere.

Por ejemplo, en vez de escribir

'$(p' \supset p')$' es una fórmula de P

escribiremos simplemente

$(p' \supset p')$ es una fórmula de P

y en vez de escribir

'p' es un símbolo

escribiremos simplemente

p es un símbolo.

2. *Eliminación de paréntesis*

De ahora en adelante eliminaremos habitualmente los paréntesis más externos de una fórmula. Por ej., en vez de escribir

$$(p' \supset (p'' \supset p'))$$

escribiremos simplemente

$$p' \supset (p'' \supset p').$$

Nota.—Nos mostraremos flexibles al usar estas convenciones, colocando, cuando resulte natural hacerlo así en el contexto, todas las comillas o paréntesis que correspondan.

19. Semántica de P. Definiciones de *interpretación de P, verdadero/falso para una interpretación de P, modelo de una fórmula/conjunto de fórmulas de P, fórmula lógicamente válida de P, fórmula consistente desde el punto de vista de la teoría de modelos/conjunto de fórmulas de P, consecuencia semántica (en fórmulas de P), tautología de P*

Esta sección consiste sobre todo en una enunciación abstracta de lo que se explica normalmente mediante las tablas de verdad usuales.

Definición. Una *interpretación de P* es una asignación a cada símbolo proposicional de P de uno de los dos (no ambos) valores veritativos verdad y falsedad, y una asignación a las conectivas de P de sus significados veritativo-funcionales habituales (que definiremos más adelante de manera más precisa en las cláusulas 2 y 3 de la definición de *verdadero para una interpretación de P*).

Para n símbolos proposicionales distintos existen 2^n interpretaciones posibles distintas. Por ejemplo, para el símbolo p', existen $2^1 = 2$ interpretaciones posibles, esto es:

(1) a p' se le asigna V
(2) a p' se le asigna F.

Para el par p', p'' existen $2^2 = 4$ interpretaciones posibles:

(1) a ambos se les asigna V
(2) a p' se le asigna F y a p'' se le asigna V
(3) a p' se le asigna V y a p'' se le asigna F
(4) a ambos se les asigna F.

Puesto que P tiene $\aleph_0$ (una cantidad enumerable de) símbolos proposicionales, existen $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (una cantidad no-numerable de) diferentes interpretaciones posibles de P. (Para $\aleph_0$ y $\mathfrak{c}$, ver Apéndice 1.)

Definición de verdadero para una interpretación P

Sea I una interpretación cualquiera de P, y sean A y B fórmulas cualesquiera de P. Entonces:

1. Si A es un símbolo proposicional, entonces A es verdadero para I sii I asigna el valor veritativo verdad a A.
2. $\sim$A es verdadero para I sii A no es verdadero para I.
3. (A $\supset$ B) es verdadero para I sii o bien A no es verdadero para I, o bien B es verdadero para I[4].

Definición de falso para una interpretación de P

A es falsa para *I* si *A* no es verdadera para *I*.

Cuando una fórmula es verdadera/falsa para una interpretación dada, diremos que tiene el valor veritativo verdad/falsedad para esa interpretación.

Definición. Una interpretación I es un *modelo* de una fórmula (o conjunto de fórmulas) de P sii la fórmula (o cada fórmula del conjunto) es verdadera para I.

Hasta que hagamos nueva referencia a ello, A, B, C, etc., han de ser en lo que sigue fórmulas cualesquiera de P.

Definición. A es una fórmula *lógicamente válida* de P [$\vdash_P A$] sii A es verdadera para toda interpretación de P.

Ejemplos: Las siguientes fbfs son fórmulas lógicamente válidas de P (recuérdese la convención acerca de la eliminación de paréntesis):

$$p' \supset p'$$
$$p' \supset (p'' \supset p')$$
$$(p' \supset (p'' \supset p''')) \supset ((p' \supset p'') \supset (p' \supset p'''))$$
$$(\sim p' \supset \sim p'') \supset (p'' \supset p')$$

Las siguientes (expresiones) *no* son fbfs lógicamente válidas de P:

$$p'$$
$$\sim p'$$
$$\sim (p' \supset p')$$

'$\vdash_P$' es un símbolo del metalenguaje, no del lenguaje objeto P. Así

$$\vdash_P p'$$

es una abreviatura de

'p'' es una fórmula lógicamente válida de P.

Por convención, con los símbolos '$\vdash$' y '$\vdash$' [secc. 22] se omiten todas las comillas que habrían de corresponderles. Por ejemplo, escribimos

$$\vdash_P p' .$$

y no

$$\vdash_P \text{`}p'\text{'}.$$

No resulta habitual poner subíndice a '$\vdash$', tal y como acabamos de hacer. Normalmente sólo se está estudiando un lenguaje formal. Sin embargo, puesto que habremos de estudiar varios lenguajes formales dife-

rentes, pondremos ocasionalmente subíndices a '⊨' para indicar cuál es el lenguaje formal del que estamos hablando.

Definición. Una fórmula o conjunto de fórmulas de P *consistente desde el punto de vista de la teoría de modelos* (*m-consistente*) es una fórmula o conjunto de fórmulas de P que tiene un modelo.

Una fórmula, o conjunto de fórmulas, de P *inconsistente desde el punto de vista de la teoría de modelos* (*m-inconsistente*) es una fórmula o conjunto de fórmulas de P que no tiene ningún modelo.

Más adelante definiremos las nociones de fórmula, o conjunto de fórmulas, de un sistema formal SP *consistente/inconsistente desde el punto de vista de la teoría de la demostración.* Tenemos que demostrar que una fórmula o conjunto de fórmulas de P es consistente desde el punto de vista de la teoría de modelos sii es una fórmula o conjunto de fórmulas de SP consistente desde el punto de vista de la teoría de la demostración. Demostraremos esto en la secc. 32 mediante la demostración de Henkin de la completud semántica de SP. [Para el sistema SP, ver la secc. 22.]

Definición. Una fórmula B de P es una consecuencia semántica de una fórmula A de P [$A \models_P B$] sii no existe ninguna interpretación de P para la cual A sea verdadera y B sea falsa [5].

(Luego si no existe ninguna interpretación de P para la cual A sea verdadera, es decir, si A es una fórmula m-inconsistente, entonces cualquier fórmula de P puede ser una consecuencia semántica de A.)

Definición. B es una consecuencia semántica de un conjunto Γ *de fórmulas de P* [$\Gamma \models_P B$] sii no existe ninguna interpretación de P para la cual toda fórmula de Γ sea verdadera y B sea falsa[5].

El conjunto vacío: ϕ

Adoptaremos la convención habitual de que toda interpretación de P es un modelo del conjunto vacío. Entonces:

19.1 $\phi \models_P A$ *sii* $\models_P A$
es decir, A es una consecuencia semántica del conjunto vacío sii A es lógicamente válida.

Consecuencias de estas definiciones

19.2 *Para cualquier interpretación dada, una fórmula dada es o bien verdadera, o bien falsa.*

19.3 *Ninguna fórmula es a la vez verdadera y falsa para la misma interpretación.*

19.4 *A es falsa para una interpretación dada sii* $\sim A$ *es verdadera para esa interpretación; y A es verdadera para una interpretación sii* $\sim A$ *es falsa para esa interpretación.*

19.5 *Si A y* $A \supset B$ *son ambas verdaderas para una interpretación dada, entonces B es verdadera para esa interpretación.*

19.6 *Si* $\vdash_P A$ *y* $\vdash_P A \supset B$, *entonces* $\vdash_P B$.

19.7 *B es una consecuencia semántica de A sii* $A \supset B$ *es lógicamente válida: es decir,* $A \models_P B$ *sii* $\vdash_P A \supset B$.

Demostraciones de 19.5 y 19.6:

19.5 *Si A y* $A \supset B$ *son ambas verdaderas para una interpretación dada, entonces B es verdadera para esa interpretación.*

Demostración. Supongamos que A y $A \supset B$ son ambas verdaderas para alguna interpretación. Entonces, por la cláusula 3 de la definición de verdadero para una interpretación de P (p.), B también es verdadero para esa interpretación.

19.6 *Si* $\vdash_P A$ *y* $\vdash_P A \supset B$, *entonces* $\vdash_P B$.

Demostración. Supongamos que A y $A \supset B$ son lógicamente válidas, mientras que B no lo es. Entonces B no es verdadera para alguna interpretación. Para esa interpretación, A será verdadera y $A \supset B$ será falsa. Pero esto contradice nuestro supuesto de que $A \supset B$ era lógicamente válida. Por lo tanto, si A y $A \supset B$ son lógicamente válidas, también lo es B.

Definición. A es una *tautología de P* sii A es verdadera para toda asignación de valores de verdad a sus símbolos proposicionales cuando las conectivas conservan sus significados usuales de las tablas de verdad: es decir, sii A es verdadera para toda interpretación de P: es decir: sii A es una fórmula lógicamente válida de P.

(En el caso del lenguaje P no necesitamos, o mejor no podemos, distinguir las tautologías de P de las fórmulas lógicamente válidas de P. Más adelante, cuando lleguemos al lenguaje Q, que es adecuado para la lógica de predicados, descubriremos que las tautologías de Q son un subconjunto propio de las fórmulas lógicamente válidas de Q. Lo que estamos haciendo ahora es preparar el camino.)

Desde un punto de vista intuitivo, una tautología es una fórmula de la que puede comprobarse que es verdadera para todas las interpretaciones mediante el método usual de tabla de verdad (finita). No se puede hacer lo mismo con algunas fórmulas lógicamente válidas del lenguaje de predicados Q.

20. Algunas verdades acerca de $\vdash^p$. El Teorema de Interpolación para P

20.1 $A \vdash_p A$.

20.2 *Si* $\Gamma \vdash_p A$, *entonces* $\Gamma \cup \Delta \vdash_p A$.

20.3 *Si* $\Gamma \vdash_p A$ *y* $A \vdash_p B$, *entonces* $\Gamma \vdash_p B$.

20.4 *Si* $\Gamma \vdash_p A$ *y* $\Gamma \vdash_p A \supset B$, *entonces* $\Gamma \vdash_p B$.

20.5 *Si* $\vdash_p A$, *entonces* $\Gamma \vdash_p A$,

donde A y B son fórmulas cualesquiera de P, y Γ y Δ son conjuntos cualesquiera de fórmulas de P.

Las afirmaciones anteriores son consecuencias más o menos inmediatas de las definiciones.

Repetimos aquí para mayor comodidad 19.6 y 19.7:

19.6 *Si* $\vdash_p A$ *y* $\vdash_p A \supset B$, *entonces* $\vdash_p B$.

19.7 $A \vdash_p B$ *sii* $\vdash_p A \supset B$.

20.6 (*Teorema de Interpolación para P*) *Si* $\vdash_p A \supset B$, *y A y B tienen al menos un símbolo proposicional en común, entonces existe una fórmula C de P cuyos símbolos proposicionales aparecen en A y B de forma que se cumple* $\vdash_p A \supset C$ *y* $\vdash_p C \supset B$.

Demostración informal

1. Supongamos que todo símbolo proposicional de A aparece también en B. Entonces C habrá de ser el mismo A, ya que, obviamente, si $\vdash_p A \supset B$, entonces $\vdash_p A \supset A$ y $\vdash_p A \supset B$.

2. Supongamos ahora que existe un símbolo proposicional que aparece en A pero que no aparece en B. Llamémosle '*p*'. Puesto que por hipótesis $A \supset B$ es lógicamente válida, $A \supset B$ toma el valor V cuando a *p* se le asigna V, y también toma el valor V cuando a *p* se le asigna el valor F. Sea *q* un símbolo proposicional cualquiera que aparece tanto en A como en B. Sea A_1 la fórmula que resulta de A cuando sustituimos *p* por $(q \supset q)$ en A, y sea A_2 la fórmula que resulta de A cuando *p* se

sustituye por $\sim(q \supset q)$ en A. Entonces $A_1 \supset B$ y $A_2 \supset B$ son ambas lógicamente válidas (A_1 es el resultado de sustituir p por V en A; A_2 es el resultado de sustituir p por F en A). Un sencillo razonamiento por tablas de verdad mostrará que, dadas las definiciones de A_1 y de A_2, $A \supset (A_1 \vee A_2)$ es una tautología según tabla de verdad, y por lo tanto, puesto que tanto $A_1 \supset B$ como $A_2 \supset B$ son tautologías de P (como acabamos de ver más arriba), $(A_1 \vee A_2) \supset B$ será también una tautología según tabla de verdad. Pero '$\vee$' no es un símbolo de P. Sin embargo, para fórmulas cualesquiera A y B se cumple

$$(A \vee B) \equiv (\sim A \supset B).$$

De forma que podemos volver a escribir $A_1 \vee A_2$ como $\sim A_1 \supset A_2$. Tenemos entonces:
Si $\vdash_P A \supset B$, entonces $\vdash_P A \supset (\sim A_1 \supset A_2)$ y $\vdash_P (\sim A_1 \supset A_2) \supset B$. Obtenemos así nuestra fórmula C: $(\sim A_1 \supset A_2)$.

3. Si hay más de un símbolo proposicional en A que no aparezca en B, haremos que la fórmula obtenida a partir de A al reemplazar *cada* uno de tales símbolos por $(q \supset q)/\sim(q \supset q)$ sea A_1/A_2. El resto del argumento discurrirá entonces de la misma forma.

En la respuesta al ejercicio de la secc. 27 se ofrece una demostración rigurosa de este teorema mediante inducción matemática sobre el número de símbolos proposicionales que están en A pero que no están en B.

21. Potencia expresiva de P. Conjuntos adecuados de conectivas

Vamos a demostrar (Teorema 21.1) que el lenguaje P es capaz de expresar cualquier función de verdad, en el siguiente sentido:

> A cada función de verdad le corresponde siempre una tabla de verdad completa. A cada tabla de verdad completa le corresponde (no necesariamente de forma unívoca) una fórmula de P ('le corresponde' en el sentido de que esa tabla de verdad es su tabla de verdad).

Ejemplos:

1. A la función de verdad *implicación material* le corresponde la tabla

$$\langle V, V \rangle = V$$
$$\langle F, V \rangle = V$$
$$\langle V, F \rangle = F$$
$$\langle F, F \rangle = V$$

A esta tabla le corresponde, entre otros, la fórmula $p' \supset p''$:

p'	p''	$p' \supset p''$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

2. A la función de verdad —carente de nombre— a la que le corresponde la siguiente tabla:

$$\langle V\ V\ V\rangle = F$$
$$\langle F\ V\ V\rangle = F$$
$$\langle V\ F\ V\rangle = F$$
$$\langle F\ F\ V\rangle = F$$
$$\langle V\ V\ F\rangle = F$$
$$\langle F\ V\ F\rangle = V$$
$$\langle V\ F\ F\rangle = F$$
$$\langle F\ F\ F\rangle = F$$

le corresponde (entre otras) la fórmula

$$\sim(\sim(\sim p' \supset \sim p') \supset = = p'')$$

de forma que:

p'	p''	p'''	$\sim(\sim(\sim p' \supset \sim p'') \supset \sim \sim p''')$
V	V	V	F
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	F
V	V	F	F
F	V	F	V
V	F	F	F
F	F	F	F

En lugar de decir que P es capaz de expresar cualquier función de verdad, diremos que el conjunto de conectivas $\{\sim, \supset\}$ resulta adecuado para expresar cualquier función de verdad, puesto que las únicas conectivas de P son $\sim$ y $\supset$. También resultan adecuados algunos otros conjuntos de conectivas; es decir, algunos lenguajes, que sólo se diferencian de P en que tienen conectivas diferentes, también son capaces de expresar cualquier función de verdad. ('Conectivas diferentes' quiere decir en

este caso conectivas que difieren en su definición mediante tablas de verdad, y no meramente en apariencia física de sus signos.)

El Teorema 21.1 (que todavía tenemos que demostrar) es nuestro primer metateorema importante:

21.1 *El conjunto* $\{\sim, \supset\}$ *resulta adecuado para expresar cualquier función de verdad* [*luego P puede expresar cualquier función de verdad*]

La demostración del metateorema 21.1 se hace en dos pasos. Primero demostramos que el conjunto $\{\sim, \vee, \wedge\}$ es adecuado (Metateorema 21.2); y después demostramos que si el conjunto $\{\sim, \vee, \wedge\}$ es adecuado, entonces el conjunto $\{\sim, \supset\}$ también lo es.

21.2 *El conjunto* $\{\sim, \vee, \wedge\}$ *es adecuado*

Demostración. Desde un punto de vista intuitivo, la demostración consiste en mostrar que, dada cualquier tabla de verdad completa, podemos construir una fórmula[6] en forma normal disyuntiva que tiene como tabla de verdad dicha tabla.

Una fórmula está en *forma normal disyuntiva* (FND) sii es una disyunción de conjunciones de símbolos proposicionales aislados o de sus negaciones; se consideran como casos degenerados de disyunciones/conjunciones símbolos proposicionales aislados y sus negaciones, y se admiten disyunciones/conjunciones de más de dos disyuntos/coyuntos.

Ejemplos (en lo que sigue sólo incluiremos tantos paréntesis como sean necesarios para evitar la ambigüedad):

1. $(p' \wedge \sim p'' \wedge p''') \vee (p'' \wedge \sim p') \vee (\sim p'''' \wedge p''')$
2. $(p' \wedge \sim p'' \wedge p''') \vee (p'' \wedge \sim p') \vee \sim p''''$
   [$\sim p''''$ se considera como una conjunción degenerada que tiene sólo un coyunto.]
3. $p' \vee p''$
   [p' y p'' se consideran como conjunciones degeneradas.]
4. $p' \wedge p''$
   [Esta fórmula se considera como una disyunción degenerada que tiene sólo un disyunto, que es la fórmula entera.]
5. $\sim p'$
   [Esta fórmula se considera como una disyunción degenerada de una conjunción degenerada.]

Adviértase que una fórmula está en FND sólo si

(1) las únicas conectivas que aparecen en ella son conectivas de negación, conjunción y disyunción (aunque no necesariamente todas ellas), y

(2) la negación está adosada sólo a símbolos proposicionales aislados, y no a expresiones más complicadas (por ejemplo, a conjunciones o disyunciones).

Ahora podemos desarrollar fácilmente la demostración:

Sea f una función cualquiera con un número cualquiera n de argumentos. Escribamos la tabla de verdad completa que corresponde a f. Tendrá $n+1$ columnas y 2^n filas. Comprobemos las V y las F de la última columna (es decir, la columna que da los valores de la función para los conjuntos de argumentos de las filas correspondientes). Hay tres posibilidades:

1. Que en la última columna sólo haya F.
2. Que en la última columna sólo haya una V.
3. Que en la última columna haya más de una V.

Vamos a mostrar, para cada uno de estos casos, cómo se construye una fórmula en FND que tenga n símbolos proposicionales diferentes y que tenga la misma tabla de verdad que f.

Caso 1 (Que en la última columna sólo haya F)

Entonces

$$p' \wedge \sim p' \wedge p'' \wedge p''' \wedge \ldots \wedge p^n$$

(donde p^n es una abreviatura de p seguida de n acentos) es una fórmula en FND que tiene la misma tabla de verdad que f, ya que $p' \wedge \sim p'$ siempre resulta F, y por lo tanto hace que ninguna fórmula resulte V.

Caso 2 (Que en la última columna sólo haya una V)

Sigamos la fila que tiene en su columna final la V. Si el primer signo de la fila es V, escribamos p'; si es F, escribamos $\sim p'$. Si el segundo signo es V, escribamos p''; si es F, escribamos $\sim p''$. Y así sucesivamente, hasta que acabemos con el n-ésimo signo. Formemos la conjunción de lo que hemos escrito (es decir, insertemos n-1 signos de conjunción en los lugares apropiados). La fórmula resultante estará en FND y tendrá la misma tabla de verdad que la función f.

Ejemplo: Sea f la función de tres argumentos que tiene la tabla

V	V	V	=	F
F	V	V	=	F
V	F	V	=	V
F	F	V	=	F
V	V	F	=	F
F	V	F	=	F
V	F	F	=	F
F	F	F	=	F

Entonces la fórmula

$$p' \wedge \sim p'' \wedge p'''$$

está en FND y tiene la misma tabla de verdad que *f*. Tiene el valor V sii p' tiene V, p'' tiene F, y p''' tiene V. En todos los demás casos tiene el valor F.

Caso 3 (Que en la última columna haya más de una V)

Construyamos una fórmula igual que en el caso 2 para cada fila que acabe en una V. Formemos la *disyunción* de todas esas fórmulas.

La fórmula resultante estará en FND y tendrá la misma tabla de verdad que *f*.

Ejemplo: Sea *f* la función de tres argumentos que tiene la tabla

V	V	V	= F
F	V	V	= F
V	F	V	= V
F	F	V	= F
V	V	F	= F
F	V	F	= V
V	F	F	= F
F	F	F	= V

Entonces la fórmula

$$(p' \wedge \sim p'' \wedge p''') \vee (\sim p' \wedge p'' \wedge \sim p''') \vee (\sim p' \wedge \sim p'' \wedge \sim p''')$$

está en FND y tiene la misma tabla de verdad que *f*. Tiene el valor V en cada uno de los tres casos siguientes:

(1) p' V, p'' F, p''' V
(2) p' F, p'' V, p''' F
(3) p', p'' y p''' tienen F

y en los restantes casos tiene el valor F.

Completamos así la demostración del Metateorema 21.2.

Demostración del Metateorema 21.1 (*El conjunto* $\{\sim, \supset\}$ *es adecuado*)

1. Cualquier *conjunción* de dos fórmulas A y B tiene la misma tabla de verdad que una fórmula en la que A y B están relacionados mediante $\sim$ y $\supset$ en vez de estarlo mediante $\wedge$, de forma que

$$(A \wedge B) \equiv \sim(A \supset \sim B)$$

Sea C una fórmula cualquiera en la que aparece $\wedge$. Entonces si reemplazamos cada subfórmula de C que tenga la forma $(A \wedge B)$ por una subfórmula de la forma $\sim(A \supset \sim B)$ obtenemos una fórmula en la que no aparece $\wedge$ y que tiene la misma tabla de verdad que C.

2. Lo mismo sucede en el caso de $\vee$. Cualquier *disyunción* de dos fórmulas A y B tiene la misma tabla de verdad que una fórmula en la que A y B están relacionadas mediante $\sim$ y $\supset$ en vez de estarlo mediante $\vee$, de forma que:

$$(A \vee B) \equiv (\sim A \supset B) \text{ [por ejemplo } ([\sim A] \supset B)].$$

3. Sea W una fórmula cualquiera en la que aparece o bien $\wedge$, o bien $\vee$, o bien ambos signos. Si llevamos a cabo sucesivamente las operaciones de sustitución descritas en (1) y (2), obtenemos una fórmula W′ en la que no aparecen conectivas distintas de $\sim$ y $\supset$ y que tiene la misma tabla de verdad que W.

4. Así, puesto que el conjunto $\{\sim, \wedge, \vee\}$ resulta adecuado para expresar cualquier función de verdad [21.2], también resulta adecuado el conjunto $\{\sim, \supset\}$.

Q.E.D.

Mediante argumentos del mismo tipo también podemos mostrar que otros conjuntos de conectivas resultan adecuados.

21.3 *El conjunto* $\{\sim, \vee\}$ *es adecuado* [Emil L. Post, 1920]

Demostración. Se utiliza el Metateorema 21.2 y el esquema tautológico

$$(A \vee B) \equiv \sim(\sim A \wedge \sim B).$$

21.4 *El conjunto* $\{\sim, \wedge\}$ *es adecuado*

Demostración. Se utiliza el Metateorema 21.2 y el esquema tautológico

$$(A \vee B) \equiv \sim(\sim A \wedge \sim B)$$

C. S. Peirce, en un trabajo escrito alrededor de 1880, que no llegó a publicar ('A Boolean Algebra with One Constant', *Collected Papers*, iv, secc. 12-20 [pp. 13-18]), presentó un lenguaje para el Algebra Booleana con una sola constante 'que sirve al mismo tiempo como signo único para la composición de términos y que hace innecesarios los signos de negación, de "lo que es" y de "nada"'. Para lo que ahora nos interesa, podemos considerarlo como una conectiva diádica que significa 'Ni A ni B'. Peirce proclamó que era adecuado, pero no ofreció una demostración rigurosa de su adecuación. Más tarde, en otro trabajo inédito escrito en 1902 (*Collected Papers*, iv, secc. 265 [p. 216]), mostró que todo lo que pudiera expresarse mediante la conectiva que significa 'Ni A ni B' podría expresarse igualmente utilizando sólo una conectiva que significa 'O no A o no B'. Henry M. Sheffer, sin conocer el resultado de Peirce, mostró en 1912 que todas las funciones de verdad expresables mediante las conectivas primitivas de los Principia Mathematica ($\sim$, $\vee$), podrían expresarse mediante cualquiera de las dos conectivas de Peirce. Emil L. Post fue el primero que presentó una demostración absolutamente general de adecuación (para $\{\sim, \vee\}$, en su tesis doctoral de la Universidad de Columbia, completada en 1920 y publicada al año siguiente: cf. Post, 1920).

21.5 *El conjunto* $\{\downarrow\}$ *es adecuado* [C. S. Peirce, 1880; H. M. Sheffer, 1912. Véase el comentario precedente.]

$A \downarrow B$ tiene el valor V sii tanto A como B tienen el valor F. Luego $p \downarrow q$ puede leerse 'Ni p ni q'.

Demostración. Se utiliza el Metateorema 21.4 y el esquema tautológico

$$\sim A \equiv A \downarrow A, \quad (A \wedge B) \equiv (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$$

21.6 *El conjunto* $\{|\}$ *es adecuado* [C. S. Peirce, 1902; H. M. Sheffer, 1912. Véase el comentario que precede a 21.5.]

El símbolo | expresa lo que habitualmente recibe el nombre de 'función barra de Sheffer' (ver el comentario que precede a 21.5). A | B tiene el valor F sii tanto A como B tienen el valor V. Así, $p \mid q$ puede leerse 'No a la vez p y q', o también 'O bien no p o bien no q, o bien no p y no q' (*).

(*) Esta última lectura no es sino la expresión de la correspondiente tabla de verdad (FVVV) (NT).

Demostración. Se utiliza el Metateorema 21.3 y el esquema tautológico

$$\sim A \equiv A \mid A,\ (A \vee B) \equiv (A \mid A) \mid (B \mid B).$$

Hay otros conjuntos adecuados y algunos inadecuados.

21.7 *El conjunto* $\{\wedge, \vee\}$ *no es adecuado*

La demostración (que en este caso sólo esbozamos) se lleva a cabo mostrando que la negación de una fórmula no puede expresarse mediante ninguna combinación de los símbolos proposicionales $\wedge$ y $\vee$. Sea P′ un lenguaje semejante a P excepto en que, en lugar de las conectivas $\wedge$ y $\square$, tiene las conectivas $\sim$ y $\supset$. Se demuestra que (1) ninguna fórmula de P′ que conste de sólo u (una aparición de un) símbolo puede tener el valor V cuando todos los símbolos proposicionales que la constituyen tienen el valor F. Se demuestra después que (2) si esto es verdad de *cualquier* fórmula de P′ que tenga menos de *m* (apariciones de) símbolos, *entonces* será también verdad de toda fórmula de P que tenga *m* símbolos. De ello se sigue que *ninguna* fórmula de P′ puede tener el valor V cuando todos los símbolos proposicionales que la constituyen tienen el valor F, y, por lo tanto, que P′ no puede expresar la negación. [Este tipo de demostración recibe el nombre de demostración por inducción matemática (fuerte); volveremos más adelante sobre ello.]

21.8 *El conjunto* $\{\wedge, \supset\}$ *no es adecuado*

Demostración semejante a la de 21.7.

21.9 *El conjunto* $\{\supset, \vee\}$ *no es adecuado*

Demostración semejante a la de 21.7.

No todos los conjuntos que contienen como elemento a $\sim$ resultan adecuados, y no todos los conjuntos que no lo contienen son inadecuados.

21.10 *El conjunto* $\{\sim, \equiv\}$ *no es adecuado*

La demostración es semejante a la de 21.7, pero en este caso mostramos que, por ejemplo, la implicación material (también nos serviría la conjunción o la disyunción) no puede expresarse mediante ninguna combinación de los símbolos proposicionales $\sim$ y $\equiv$, ya que la tabla de verdad de la implicación material tiene cuatro filas y una columna final

con tres V y una F, mientras que cualquier tabla de verdad de cuatro filas de cualquier fórmula que contenga como únicas conectivas $\sim$ y $\equiv$ debe tener en su columna final o bien todo V, o bien todo F, o bien dos V y dos F. (Este resultado se demuestra de forma rigurosa mediante inducción matemática en la respuesta al ejercicio 2 de la secc. 27, pp. 109-110).

21.11 *La implicación material y la disyunción exclusiva, juntas, son adecuadas*

[No existe ningún símbolo convenido para la disyunción exclusiva. Su tabla de verdad es

A	B	A disy. excl. B
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Puede comprobarse que la disyunción exclusiva tiene la misma tabla de verdad que la equivalencia material negada. Por ello, usaremos para la disyunción exclusiva el símbolo $\not\equiv$.]

Demostración. Se utiliza 21.1 y el esquema tautológico

$$\sim A \equiv (A \not\equiv (A \supset A)).$$

21.12 *Las únicas conectivas diádicas que resultan adecuadas por sí solas son* $|$ *y* $\downarrow$ [Żyliński, 1924]

Demostración. Supongamos que existiera otra conectiva. Llamemos * a esta supuesta conectiva. Estudiemos minuciosamente, fila por fila, cuál debería ser su tabla de verdad:

A	B	A * B
V	V	?
F	V	?
V	F	?
F	F	?

Si el signo de la primera fila fuera V, entonces cualquier fórmula que se construyera utilizando solamente * adoptaría el valor V cuando todos sus símbolos proposicionales adoptaran el valor V. Luego ninguna com-

binación podría expresar la negación de A. Luego el signo de la primera fila debe ser F. De igual manera, el signo de la última fila debe ser V.

Esto nos da como resultado:

A	B	A * B
V	V	F
F	V	?
V	F	?
F	F	V

Si tanto el segundo como el tercer signo fueran F, * tendría la misma tabla que | (y por lo tanto sería en todo la misma conectiva que |, excepto en su apariencia física, que no es importante desde un punto de vista teórico).[7] Si fueran ambos V, * sería lo mismo que ↓. Lo cual nos deja sólo dos posibilidades, (1) que el segundo signo sea V y que el tercer signo sea F, y (2) que el segundo signo sea F y que el tercer signo sea V. En el primer caso tendríamos:

$$A * B \equiv \sim A$$

En el segundo caso tendríamos

$$A * B \equiv \sim B$$

En ambos casos, * sería definible en términos de ~. Pero ~ no resulta adecuado por sí solo, puesto que las únicas funciones de un argumento susceptibles de definición a partir de él son la negación y la identidad. Es decir, si partimos de una fórmula A y utilizamos sólo la negación, podemos obtener fórmulas que son equivalentes a A desde el punto de vista veritativo-funcional, y fórmulas que son equivalentes a ~A desde el punto de vista veritativo-funcional, pero nada más:

$$A$$
$$\sim A$$
$$\sim \sim A$$
$$\sim \sim \sim A$$
$$\sim \sim \sim \sim A$$
$$\ldots$$

No podemos definir en términos únicamente de ~ ninguna de las otras dos funciones de verdad de un argumento (secc. 16, p. 69, más arriba):

$$\begin{cases} f_1(V) = V \\ f_1(F) = V \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} f_4(V) = F \\ f_4(F) = V \end{cases}$$

Luego cualquier conectiva diádica que no sea o bien | o bien ↓ resulta inadecuada por sí sola.

Q.E.D.

22. Un mecanismo deductivo para P: el sistema formal SP. Definiciones de demostración en SP, teorema de SP, derivación en SP, consecuencia sintáctica en SP, conjunto consistente de SP desde el punto de vista de la teoría de la demostración

Consideremos esta sección como si viniera inmediatamente después de la secc. 18. E imaginemos que no sabemos nada acerca de los contenidos de las secc. 19-21, es decir, que no sabemos nada acerca de ninguna interpretación de P.

Vamos a especificar un mecanismo deductivo para el lenguaje formal P, esto es, un conjunto de axiomas y una regla de inferencia. Al sistema formal resultante de esta especificación le daremos el nombre de sistema SP (sistema proposicional).

El sistema formal SP

Axiomas de SP

Si A, B y C son fórmulas cualesquiera de P (no necesariamente distintas), entonces las fórmulas siguientes son axiomas de SP (recordemos la convención acerca de la eliminación de paréntesis):

[SP 1] $A \supset (B \supset A)$
[SP 2] $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
[SP 3] $(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$

Ninguna otra cosa es un axioma de SP.

Comentarios

1. Las expresiones '$A \supset (B \supset A)$', etc., pertenecen al metalenguaje ('A' y 'B' no son símbolos de P). Por lo tanto, SP 1, SP 2 y SP 3 no son

axiomas de SP, sino *esquemas* de axiomas. Cualquier fbf de P que tenga la forma de SP 1, SP 2 o SP 3 es un axioma de SP. De hecho hay una cantidad infinita de fórmulas de P que son axiomas de SP en virtud de estos tres esquemas.

Ejemplos: Las siguientes fórmulas son axiomas de SP:

$p' \supset (p'' \supset p')$	[por SP 1]
$p' \supset (p' \supset p')$	[por SP 1]
$\sim p' \supset (p' \supset \sim p')$	[por SP 1]
$(\sim \sim p' \supset \sim p') \supset (p' \supset \sim p')$	[por SP 3]
$(p' \supset p'') \supset (p' \supset (p' \supset p''))$	[por SP 1]

Las fórmulas siguientes *no* son axiomas de SP:

$A \supset (B \supset A)$	[no es una fórmula de P]
$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$	[lo mismo]
$(\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$	[lo mismo]
$(p' \supset p'') \supset (\sim p'' \supset \sim p')$	[*no* autorizado por SP 3]

2. No nos planteamos si estos axiomas son verdades autoevidentes ni nada por el estilo. Son simplemente cadenas de símbolos del alfabeto de P, ciertamente susceptibles de recibir una interpretación, pero que se *definen* sin referencia a ninguna interpretación.

Regla de inferencia de SP

Si A y B son fórmulas cualesquiera de P, entonces B es una consecuencia inmediata en SP del par de fórmulas A y $(A \supset B)$.

Informalmente: Dados A y $(A \supset B)$, podemos inferir B.

Comentario. Al decir que B es una consecuencia inmediata del *par* de fórmulas A y $(A \supset B)$ queremos decir que nos hacen falta *las dos* fórmulas para obtener B como consecuencia inmediata. B no es una consecuencia inmediata sólo de A o sólo de $(A \supset B)$. El orden en el que aparecen las fórmulas A y $(A \supset B)$ no importa.

Llamamos a esta regla 'Modus Ponens para $\supset$' o, de forma abreviada, 'MP'.

Ejemplos:

1. p' es una consecuencia inmediata en SP de p'' y de $(p'' \supset p')$.
2. p' es una consecuencia inmediata en SP de p' y de $(p' \supset p')$, pero *no* sólo de p'.

3. $(p' \supset p')$ es una consecuencia inmediata en SP de $(p'' \supset (p' \supset p'))$ y de p''.

4. $\sim\sim p'$ es una consecuencia inmediata en SP de $(\sim p' \supset \sim\sim p')$ y de $\sim p'$.

Nota. Al establecer la regla de inferencia y al dar estos ejemplos, no hemos eliminado ningún paréntesis.

Definición. Una *demostración* en SP es una cadena finita (pero no vacía) de fórmulas de P, cada una de las cuales es, o un axioma de SP, o una consecuencia inmediata, mediante la regla de inferencia de SP, de dos fórmulas que la preceden en la cadena.

Ejemplos: Las (cadenas) siguientes son demostraciones en SP (recuérdese la convención acerca de los paréntesis):

1. [1] $p' \supset ((p' \supset p') \supset p')$ [Axioma, por SP 1]
   [2] $(p' \supset ((p' \supset p') \supset (p' \supset p')) \supset (p' \supset p'))$ [Axioma, por SP 2]
   [3] $((p' \supset (p' \supset p')) \supset (p' \supset p'))$ [Consecuencia inmediata en SP, por Modus Ponens, de las fbfs que llevan los números [1] y [2]]
   [4] $p' \supset (p' \supset p')$ [Axioma, por SP 1]
   [5] $p' \supset p'$ [Consecuencia inmediata, por MP, de [3] y [4]].

Comentario. Lo que aparece entre corchetes no forma parte de la demostración; son comentarios meramente explicativos. La demostración propiamente dicha consta sólo de la cadena formada por las cinco fórmulas.

2. [1] $p' \supset (p' \supset p')$ [Axioma, por SP 1. Por sí sola, esta fbf constituye una demostración completa en SP.]

3. [1] $(\sim p'' \supset \sim p') \supset (p' \supset p'')$ [SP 3]
   [2] $((\sim p'' \supset \sim p') \supset (p' \supset p'')) \supset (\sim p' \supset ((\sim p'' \supset \sim p') \supset (p' \supset p')))$ [SP 1]
   [3] $\sim p' \supset ((\sim p'' \supset \sim p') \supset (p' \supset p''))$ [MP, 1, 2]
   [4] $(\sim p' \supset ((\sim p'' \supset \sim p') \supset (p' \supset p''))) \supset ((\sim p' \supset (\sim p'' \supset \sim p')) \supset (\sim p' \supset (p' \supset p')))$ [SP 2]
   [5] $(\sim p' \supset (\sim p'' \supset \sim p')) \supset (\sim p' \supset (p' \supset p''))$ [MP, 3, 4]
   [6] $\sim p' \supset (\sim p'' \supset \sim p')$ [SP 1]
   [7] $\sim p' \supset (p' \supset p'')$ [MP, 6, 5]

Comentarios

1. Las fórmulas que se mencionan en la definición de *demostración en* SP deben ser fórmulas completas, no meramente subfórmulas de fórmulas. Por ejemplo, la demostración del ejemplo 1 es una cadena de *cinco* fórmulas, y la demostración del ejemplo 2 es una cadena de *una* fórmula.

2. Según la definición, una demostración es una cadena, y podríamos escribir la cadena sin dejar ningún hueco entre las fórmulas. Por ejemplo, la demostración del ejemplo 1 podría comenzar de la siguiente forma [poniendo todos los paréntesis que corresponden]:

$$(p' \supset ((p' \supset p') \supset p'))((p' \supset ((p' \supset p')) \supset \ldots,$$

Los huecos son simplemente para hacer las cosas más fáciles.

Definición. Una fórmula A es un *teorema de* SP [$\vdash_{SP}$A] si existe alguna demostración en SP cuya última fórmula sea A.

Ejemplo: $(p' \supset p')$ es un teorema de SP, puesto que existe una demostración en SP en la que aparece como última fórmula: cfr. el ejemplo 1 de la p.11.22-9

'$\vdash$' es un símbolo del metalenguaje, y no del lenguaje-objeto. Se le aplica la misma convención acerca de las comillas que se aplicaba a '$\nvdash$'.

Comentario. Por nuestra definición, todo *axioma* de SP será también *un teorema* de SP. Pero la conversa no es verdadera.

Definición. Una cadena de fórmulas es una *derivación en SP de una fbf A a partir de un conjunto* Γ *de fbfs de P* sii

(1) es una cadena finita (pero no vacía) de fórmulas de P,
(2) la última fórmula de la cadena es A,
(3) cada fórmula de la cadena es
  o (i) un axioma de SP,
  o (ii) una consecuencia inmediata, mediante la regla de inferencia de SP, de dos fórmulas que la preceden en la cadena,
  o (iii) un elemento del conjunto Γ.

El conjunto Γ puede tener infinitos elementos, un número finito de elementos, o ningún elemento en absoluto.

Ejemplo: La cadena

$$p'$$
$$p' \supset p''$$
$$p''$$

es una derivación en SP de la fórmula p'' a partir del conjunto de fórmulas de P cuyos únicos elementos son p' y $p' \supset p''$; es decir, del conjunto $\{p', p' \supset p''\}$ [eliminando los paréntesis].

Comentario. La diferencia entre una *derivación en SP* y una *demostración en SP* es ésta:

En una *demostración en SP*, *cada* fórmula es un *teorema* de SP.

En una *derivación en SP* pueden aparecer fórmulas en la cadena que no sean teoremas de SP; por ejemplo, fórmulas de Γ, si Γ es un conjunto de fórmulas que no son teoremas de SP. En nuestro ejemplo, ninguna fórmula de la derivación es un teorema de SP.

Toda *demostración en SP* es también una *derivación en SP* de la última fórmula de la demostración (el teorema que dicha demostración demuestra) *a partir del conjunto vacío*, y también a partir de cualquier conjunto arbitrario de fórmulas de P. Esto se sigue de las definiciones de *demostración en SP y derivación en SP.*

Definición. Una fórmula A es una *consecuencia sintáctica en SP* de un conjunto Γ de fórmulas de P ($\Gamma \vdash_{SP} A$] sii existe una derivación de A en SP a partir del conjunto Γ.

Ejemplo: p''' es una consecuencia sintáctica en SP del conjunto $\{p', p' \supset p'', p'' \supset p'''\}$, porque existe una derivación de p''' a partir de este conjunto, por ejemplo, la derivación

$$p'$$
$$p' \supset p''$$
$$p''$$
$$p'' \supset p'''$$
$$p'''$$

Señalemos que esta cadena no es una demostración en SP.

Comentario. Una *derivación* es una cadena de fórmulas. Una *consecuencia sintáctica* es una fórmula que está en una cierta relación respecto a un conjunto de fórmulas.

Si sólo existe una fórmula en Γ, es habitual escribir $A \vdash_{SP} B$ en vez de $\{A\} \vdash_{SP} B$.

Definición. Un conjunto Γ de fórmulas de P es un *conjunto consistente de SP desde el punto de vista de la teoría de la demostración* sii para ninguna fórmula A de P no sucede que $\Gamma \vdash_{SP} A$ y que $\Gamma \vdash_{SP} \sim A$. Un conjunto Γ es un *conjunto no-consistente* (*inconsistente*) *de SP desde el punto de vista de*

la teoría de la demostración sii para alguna fórmula A de P sucede que $\Gamma \vdash_{SP} A$ y que $\Gamma \vdash_{SP} \sim A$.

Las nociones de *fórmula* de SP consistente/inconsistente desde el punto de vista de la teoría de la demostración se definen de forma similar.

Lo que llamamos conjunto consistente desde el punto de vista de la teoría de la demostración es lo que recibe habitualmente el nombre de conjunto consistente. Pero puesto que ya tenemos el concepto de conjunto consistente desde el punto de vista de la teoría de modelos y queremos distinguir los dos tipos de consistencia, usamos el término más natural para hacerlo. Abreviamos 'consistente desde el punto de vista de la teoría de la demostración' mediante 'd-consistente'. Más adelante mostraremos que un conjunto de fórmulas es un conjunto consistente de SP desde el punto de vista de la teoría de la demostración sii es un conjunto consistente de P desde el punto de vista de la teoría de modelos. Pero este resultado requiere una demostración cuidadosamente elaborada (secc. 32).

Comentarios

1. Un conjunto Γ de fórmulas de P puede ser un conjunto d-inconsistente de SP aunque, para toda fórmula A, ni A ni $\sim A$ sean *elementos* de Γ. Los conjuntos d-consistentes y d-inconsistentes se definen en términos de lo que puede ser *derivado* a partir de ellos con la ayuda de los axiomas y/o de las reglas de inferencia de SP, y una fórmula puede ser derivable en SP a partir de un conjunto de fórmulas sin que sea un elemento del conjunto.

2. La definición de conjunto α-consistente de SP hace una importante referencia al *mecanismo deductivo* de SP, en contraste con la definición de conjunto m-consistente, que no hace dicha referencia.

3. La noción de conjunto d-consistente puede definirse de igual forma para otros sistemas formales. Un conjunto de fórmulas que es un conjunto d-consistente de un sistema formal S puede ser un conjunto d-inconsistente de otro sistema formal S′ que tenga el mismo lenguaje formal que S. *Todo depende de los mecanismos deductivos de S y S′.* A diferencia de esto, un conjunto m-consistente de fórmulas de un lenguaje formal L sigue siendo un conjunto m-consistente de fórmulas de L^8, *sin importar cuál sea el mecanismo deductivo añadido a L.*

23. Algunas verdades acerca de $\vdash_{SP}$

Siendo A y B fórmulas cualesquiera de P, y Γ y Δ conjuntos cualesquiera de fórmulas de P, tenemos:

23.1 $A \vdash_{SP} A$
23.2 *Si* $\Gamma \vdash_{SP} A$, *entonces* $\Gamma \cup \Delta \vdash_{SP} A$
23.3 *Si* $\Gamma \vdash_{SP} A$ *y* $A \vdash_{SP} B$, *entonces* $\Gamma \vdash_{SP} B$
23.4 *Si* $\Gamma \vdash_{SP} A$ *y* $\Gamma \vdash_{SP} A \supset B$, entonces $\Gamma \vdash_{SP} B$
(Recurriremos con frecuencia a esta última)
23.5 *Si* $\vdash_{SP} A$, *entonces* $\Gamma \vdash_{SP} A$
23.6 $\vdash_{SP} A$ *sii* $\phi \vdash_{SP} A$

Son afirmaciones exactamente análogas a las verdades acerca de $\models_P$ (20.1-20.5 y 19.1), y también en este caso se trata de consecuencias más o menos directas de las definiciones.

23.7 $\Gamma \vdash_{SP} A$ *sii existe un subconjunto finito* Δ *de* Γ *tal que* $\Delta \vdash_{SP} A$.

Este metateorema se sigue de nuestra exigencia de que una derivación debe ser una cadena *finita* de fórmulas.

El Metateorema 23.7 guarda una perfecta analogía con otro Metateorema de la teoría de modelos:

[32.18] $\Gamma \models_P A$ *sii existe un subconjunto finito* Δ *de* Γ *tal que* $\Delta \models_P A$

Pero aunque ahora podemos demostrar perfectamente que si existe un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \models_P A$, entonces $\Gamma \models_P A$[9], no presentaremos la demostración de la afirmación conversa hasta después de la demostración de la completud semántica de SP.

Más adelante, después de que hayamos demostrado el Teorema de Deducción para SP (secc. 26), tendremos:

[26.2] $A \vdash_{SP} B$ sii $\vdash_{SP} A \supset B$.

Esta afirmación es la análoga a 19.7 en la teoría de la demostración.

Siguiendo la costumbre, escribimos $\Gamma, \Delta \vdash_{SP} A$ en vez de $\Gamma \cup \Delta \vdash_{SP} A$. De igual forma, escribimos $\Gamma, A \vdash_{SP} B$ en vez de $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{SP} B$, y $\Gamma, A, B \vdash_{SP} C$ en vez de $\Gamma \cup \{A\} \cup \{B\} \vdash_{SP} C$.

24. Conceptos de consistencia

Alonzo Church (1956, p. 108) escribe:

> La noción de *consistencia* de un sistema logístico tiene una motivación semántica, que surge de la exigencia de que no ha de ser un teorema nada que sea lógicamente absurdo o que tenga un significado autocontradictorio, o de que no habrá dos teoremas, uno de los cuales será la negación del otro. Pero pretendemos modificar esta noción originariamente semántica de tal forma que tome un carácter sintáctico (y aplicable por lo tanto a un sistema logístico independientemente de la interpretación que se adopte para él)...

[De lo que se sigue una estimación más cuidadosa de diversos conceptos de consistencia.]

Consistencia simple

Un sistema S es *simplemente consistente* sii para ninguna fórmula A de S, A y la negación de A son ambas teoremas de S.

> [Para sistemas determinados, esta definición puede transformarse en otra puramente sintáctica (de la teoría de la demostración) expresándola en términos del simbolismo utilizado en el sistema para expresar la negación, pero sin referirse a la interpretación correspondiente.]

Consistencia absoluta

Un sistema S es *absolutamente consistente* sii al menos una fórmula de S no es un teorema de S.

24.1 *Si S es un sistema formal en el que para cada fórmula A de S existe una fórmula A′ de S que bajo la interpretación correspondiente expresa la negación de A, entonces si S es simplemente consistente, entonces es absolutamente consistente.*

Demostración. Sea S cualquier sistema formal que satisface la hipótesis del teorema. Supongamos que S es simplemente consistente. Entonces no existe ninguna fórmula A de S tal que tanto A como A′ sean teoremas de S. Luego, para alguna determinada fórmula B de S, o bien B no es un teorema de S, o bien B′ no es un teorema de S. Pero tanto B como B′ son fórmulas de S. Luego S es absolutamente consistente.

24.2 *Si S es un sistema formal para el que constituye un metateorema la afirmación de que* $A,A' \vdash_S B$ *(donde A y B son fórmulas cualesquiera de S, y A' es como en* 24.1*), entonces si S es absolutamente consistente, entonces es simplemente consistente.*

Demostración. Sea S un sistema formal cualquiera que satisface la hipótesis del teorema. Supongamos que S no es simplemente consistente. Entonces $\vdash_S A$ y $\vdash_S A'$ se cumplen para alguna fórmula A. Luego, en virtud del metateorema mencionado en la hipótesis, $\vdash_S B$ para *cualquier* fórmula B; es decir, toda fórmula de S es un teorema de S. Luego S no es absolutamente consistente. Por lo tanto, si S es absolutamente consistente, entonces es simplemente consistente.

Nota. Existen sistemas formales de lógica proposicional veritativo-funcional clásica para los que no es un metateorema la afirmación de que A, $A' \vdash B$, para fórmulas cualesquiera A y B. Por ejemplo, no es un metateorema de la formulación de Hiż del cálculo proposicional clásico, que se describe más adelante en la página 140, y podríamos añadir como axiomas de su sistema alguna fórmula determinada y su negación sin que necesariamente toda fórmula se convirtiera en un teorema. Esto es, podríamos construir un sistema que contuviera todo el cálculo proposicional clásico (en el sentido de que fuera un cálculo que poseyera todos los teoremas apropiados) y que fuera absolutamente consistente sin ser simplemente consistente.

25. Demostración de la consistencia de SP

(a) *Demostración de la consistencia simple y absoluta de SP utilizando medios de la teoría de modelos.*

Esquema de la demostración. Damos en primer lugar una interpretación de P y mostramos que bajo esta interpretación todos los teoremas de SP resultan verdaderos. Tenemos así que: Si una fórmula A es un teorema de SP, entonces es verdadera para la interpretación, y por lo tanto, por la cláusula 2 de nuestra definición de *verdadero para una interpretación de P*, $\sim$A no es verdadera para la interpretación, y por lo tanto $\sim$A no es un teorema de SP. Esto es, para cualquier fórmula A de P, si A es un teorema de SP, entonces $\sim$A no es un teorema; es decir, SP es simplemente consistente. Para demostrar la consistencia absoluta de SP, todo lo que tenemos que hacer es exhibir una fórmula de P que no sea

verdadera para la interpretación y, por lo tanto, que no sea un teorema de SP.

Algunos detalles

1. Nuestra interpretación para P es ésta: A cada símbolo proposicional le asignamos el valor de verdad V. [$\sim$ y $\supset$ se interpretan igual que en las cláusulas 2 y 3 de la definición de *verdadero para una interpretación de P*, en la secc. 19.]

2. *Todo axioma de SP es verdadero para esta interpretación.*

Bosquejo de la demostración: De nuestras primeras definiciones se sigue que cualquier fórmula arbitraria de P es o verdadera para nuestra interpretación o falsa para ella. De esta forma, aunque cada uno de los tres esquemas de axioma de SP representa un conjunto infinito de axiomas, los A, B y C de aquellos esquemas ocupan el lugar de fórmulas que sólo pueden ser verdaderas o falsas bajo nuestra interpretación, y así, para comprobar si cualquiera de los (del infinito número de) axiomas podría ser falso bajo nuestra interpretación, nos basta con considerar un número finito de posibilidades para cada esquema de axioma, esto es, todas las posibles combinaciones de verdadero-falso en las letras esquemáticas que los constituyen. Por ejemplo, en el caso del esquema de axioma SP 1 $[A \supset (B \supset A)]$ tenemos que considerar cuatro posibilidades, esto es, los casos en los que

(1) A es verdadera y B es verdadera;
(2) A es falsa y B es verdadera;
(3) A es verdadera y B es falsa;
(4) A es falsa y B es falsa.

Una referencia a la cláusula 3 de la definición de *verdadero para una interpretación de P* mostrará que en cada uno de estos cuatro casos $A \supset (B \supset A)$ resulta verdadero; es decir, cualquier fórmula de P que sea un axioma de SP en virtud del esquema de axioma SP 1 será verdadera para nuestra interpretación. Dejamos al lector el comprobar que lo mismo resulta verdadero para los esquemas SP 2 [hay que considerar ocho casos] y SP 3 [cuatro casos].

3. *La (única) regla de inferencia de SP preserva la (característica de ser) verdad para nuestra interpretación* [es decir, para un par cualquiera de fórmulas A y B, si tanto A como $A \supset B$ son verdaderas para nuestra interpretación, entonces B también es verdadera para nuestra interpretación].

Demostración. Por 19.5.

4. *Todo teorema de SP es verdadero para nuestra interpretación.*

Demostración. Directamente a partir de 2 y 3.

5. *SP es simplemente consistente:* es decir, no sucede que para cualquier fórmula A de P, A y $\sim$A sean ambas teoremas de SP.

Demostración. Igual que en el *Esquema*, usando 4.

6. *SP es absolutamente consistente.*

Demostración. La fórmula $\sim p'$ (por ejemplo) no es verdadera para nuestra interpretación. Por lo tanto, por 4, no es un teorema de SP.

Resumen de esta demostración

1. Todo axioma de SP es verdadero para la interpretación.
2. La regla de inferencia de SP preserva la (característica de) verdad para la interpretación.
3. Por lo tanto, todo teorema de SP es verdadero para la interpretación.
4. Para ninguna fórmula A de P sucede que A y $\sim$A resulten ambas verdaderas para la interpretación.
5. Por lo tanto, para ninguna fórmula A de P sucede que A y $\sim$A sean ambas teoremas de SP; es decir, SP es simplemente consistente.
6. Existe al menos una fórmula de P que no es verdadera para la interpretación; por ejemplo, $\sim p'$.
7. Por lo tanto, existe al menos una fórmula de P que no es un teorema de SP: es decir, que SP es absolutamente consistente.

En la secc. 28 se presenta una demostración diferente, pero muy parecida a la anterior, de la consistencia simple y absoluta de SP: cf. el comentario que sigue a 28.3.

(b) *Demostración de la consistencia simple y absoluta de SP utilizando medios de la teoría de la demostración.*

Esquema de la demostración. Definimos desde el punto de vista de la teoría de la demostración (en términos puramente sintácticos) una cierta propiedad, X, que, si pertenece a una fórmula A, no pertenece a $\sim$A. A continuación mostramos que todo teorema de SP tiene la propiedad X. Esto es suficiente para mostrar que SP es simplemente consistente [si A es un teorema de SP, entonces $\sim$A no lo es]. Para demostrar la consistencia absoluta exhibimos una fórmula de P que no posee la propiedad X, y que, por lo tanto, no es un teorema de SP.

Detalles

1. Como propiedad X adoptamos una propiedad a la que llamaremos 'tautologicidad sintáctica'. La noción lógica normal de la tautología es una noción semántica, que tiene que ver con la verdad y la falsedad y, por lo tanto, con la interpretación de las fórmulas. Para construir la noción de tautología sintáctica tomamos la noción normal de tautología y la vaciamos de todos sus elementos semánticos. Así, en vez de hablar acerca de los valores de verdad V y F, hablamos acerca de símbolos (sin interpretar) '1' y '0' (o culesquiera otros símbolos arbitrarios). Por ejemplo, en vez de decir que $p' \supset p'$ es una tautología porque su tabla de verdad sólo presenta V en todas las posiciones de su columna final, decimos que es una tautología sintáctica porque tiene la propiedad (sintáctica) de que la tabla 1-0 que está asociada a ella (y que es el análogo sintáctico de una tabla de verdad) sólo presenta '1' en todas las posiciones de su columna final.

De lo expuesto en el último párrafo se deriva que, para nuestra demostración sintáctica, tenemos que dar construcciones sintácticas de carácter análogo al de las tablas de verdad de las conectivas de P. En este caso serán:

Tabla para $\sim$:

A	$\sim$A
1	0
0	1

Tabla para $\supset$:

A	B	A $\supset$ B
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Definimos ahora una *asociación a P* [se trata de un término inventado, que no se ha usado en ninguna otra parte] como una asociación con cada uno de los símbolos proposicionales de P de uno de los dos símbolos '1' y '0' (no de ambos), junto con una asociación con cada fórmula restante de P de '1' o '0', de acuerdo con las tablas de verdad de $\sim$ y $\supset$ que acabamos de dar. Finalmente, definimos una *tautología sintáctica* como una fórmula que está asociada con '1' para *toda* asociación a P.

2. *Todo axioma de SP es una tautología sintáctica.*

Demostración. Para cualquier asociación a P, cada fórmula de P estará asociada con uno de los dos símbolos '1' y '0' (pero no con ambos). Luego para cada esquema de axiomas de SP sólo tenemos que considerar un número finito de posibilidades [comparar este argumento con el del paso 2 de la demostración que utiliza instrumentos de la teoría de modelos, que es semejante]. Por ejemplo, para el esquema de axioma SP 1 $[A \supset (B \supset A)]$ sólo tenemos que considerar estas cuatro posibilidades:

(1) A está asociado con '1' y B con '1';
(2) A está asociado con '0' y B con '1';
(3) A está asociado con '1' y B con '0';
(4) A está asociado con '0' y B con '0'.

En cada caso, $A \supset (B \supset A)$ está asociado con el símbolo '1'. Luego cualquier fórmula de P que sea un axioma por SP 1 estará asociada con '1' para *toda* asociación a P; es decir, será una tautología sintáctica. Lo mismo sucede con los otros dos esquemas de axiomas.

3. *La (única) regla de inferencia de SP preserva la tautologicidad sintáctica.*

Demostración. Supongamos que, para dos fórmulas A y B, tanto A como $A \supset B$ son tautologías sintácticas, mientras que B no lo es. Existirá una tabla 1-0 que muestre las asociaciones a A, a B y a $A \supset B$ para cada posible combinación de asociaciones 1-0 con los símbolos proposicionales que constituyen esas fórmulas. Por hipótesis, al menos en una fila de esa tabla, B estará asociada con '0'. Pero en esa fila A estará asociada con '1', ya que, por hipótesis, A siempre está asociada con '1'. Luego en esa fila, $A \supset B$ estará asociada con '0', por la tabla de $\supset$ que hemos dado más arriba. Pero esto contradice nuestro supuesto de que $A \supset B$ es una tautología sintáctica. Luego si A y $A \supset B$ son tautologías sintácticas, B también tiene que ser una tautología sintáctica.

4. *Todo teorema de SP es una tautología sintáctica.*

Demostración. Directamente a partir de 2 y 3.

5. *SP es simplemente consistente.*

Demostración. Puede verse a partir de la tabla de $\sim$ dada en 1, que para cualquier fórmula A, si A es una tautología sintáctica, $\sim A$ no lo es. Luego (a partir de 4), si A es una teorema de SP, $\sim A$ no lo es.

6. *SP es absolutamente consistente.*

Demostración. La fórmula p' (por ejemplo) no es tautología sintáctica. Por lo tanto, por 4, no es un teorema de SP.

Nota histórica

Emil Post (1920) fue el primero en dar una demostración de la consistencia del cálculo proposicional clásico. Su demostración tenía un carácter semántico: mostró que todos los teoremas del sistema que estaba estudiando (se trataba del sistema proposicional de los *Principia Mathematica*) eran tautologías. Jān Łukasiewicz parece haber sido el primero en encontrar una demostración puramente sintáctica, del tipo esbozado en (*b*). La idea clave que es común a estas dos demostraciones de consistencia (esto es, la idea de mostrar que existe alguna propiedad que pertenece a todo axioma, que es preservada por las reglas de inferencia, y que no pertenece a ninguna fórmula contradictoria) se remonta a David Hilbert: cfr. Hilbert (1904).

26. El Teorema de Deducción para SP

El Teorema de Deducción es un metateorema que es bastante utilizado para demostrar otros metateoremas. Parece que fue Alfred Tarski en 1921 quien lo demostró por primera vez [cfr. Tarski, 1923-28, p. 32], pero la primera demostración publicada (para un sistema de lógica de predicados: el resultado incluye la demostración para un sistema de lógica proposicional) fue la de Jacques Herbrand en 1930 [cfr. Herbrand, 1929, pub. 1930]. Herbrand, que hizo sobresalientes contribuciones a la lógica matemática, murió en un accidente de montaña en 1931, a la edad de veintitrés años.

26.1 (*Teorema de Deducción para SP*) *Si* Γ, $A \vdash_{SP} B$, *entonces* $\Gamma \vdash_{SP} A \supset B$.

En otras palabras: Si B es una consecuencia sintáctica en SP del conjunto $\Gamma \cup \{A\}$, entonces $A \supset B$ es una consecuencia sintáctica en SP del conjunto Γ solo.

Esto significa a su vez que si existe una derivación en SP de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$, existe entonces una derivación en SP de $A \supset B$ a partir solamente de Γ.

Ejemplos: El Teorema de Deducción implica que:

1. Si existe una derivación en SP de p' a partir de $\Gamma \cup \{p''\}$, entonces existe una derivación en SP de $p'' \supset p'$ a partir sólo de Γ.

2. Si existe una derivación en SP de p' a partir de $\phi \cup \{p''\}$ entonces existe una derivación en SP de $p'' \supset p'$ a partir de ϕ (el conjunto vacío).

A partir del ejemplo 2 puede verse que el Teorema de Deducción implica que si $A \vdash_{SP} B$, entonces $\vdash_{SP} A \supset B$ (que es el caso en el que Γ es vacío).

Esquema de la demostración. La idea que preside la demostración es la siguiente: Suponemos que, para un conjunto cualquiera Γ de fórmulas de P y una fórmula cualquiera A de P, existe una derivación en SP de una fórmula B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$. Mostramos entonces que dada tal derivación, se puede construir una derivación en SP de una fórmula B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$. Mostramos entonces que, dada tal derivación, se puede construir una derivación en SP de $A \supset B$ a partir sólo de Γ. Concluimos que *si* existe una derivación cualquiera en SP de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$, *entonces* existe una derivación en SP de $A \supset B$ a partir sólo de Γ.

La demostración tiene que mostrar que, dada una derivación *cualquiera* de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$, existe una derivación de $A \supset B$ a partir sólo de Γ. Por lo tanto, lo que hacemos es, *en primer lugar*, considerar todas las derivaciones de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que tienen una longitud de *sólo una fórmula*, y mostrar cómo se construye, en cualquiera de esos casos, una derivación de $A \supset B$ a partir de Γ (una derivación que no tiene por qué tener exactamente una fórmula de longitud). *Después* mostramos que *si* el Teorema de Deducción vale para *todas* las derivaciones de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que tienen una longitud de *menos de k* fórmulas (donde *k* es un entero positivo cualquiera), valdrá también para *todas* las derivaciones de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que tengan *exactamente una longitud* de *k* fórmulas. Y de estos dos resultados, y del hecho de que, por definición, cualquier derivación en SP sólo puede tener una longitud finita, se sigue que el Teorema de Deducción vale para *todas* las derivaciones de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$.

La forma de demostración descrita en este último párrafo es conocida por el nombre de *demostración por inducción matemática (fuerte)*. Sus dos etapas reciben los nombres de *Base* y *Paso de la Inducción*. En la Base de una demostración por inducción matemática establecemos que el Teorema (cualquiera que sea éste) vale para el caso mínimo (en la presente demostración se trata del caso en el que la derivación tiene una longitud de una sola fórmula: no puede darse el caso de una derivación más pequeña que ésta; una derivación tiene que tener como mínimo una longitud de una fórmula).

En el Paso de la Inducción probamos que si el Teorema vale para todos los casos hasta un punto dado cualquiera, entonces vale también para todos los casos en el punto que sigue a continuación. (Esto será una inducción fuerte. Una inducción débil sería una inducción en la que el Paso de la inducción mostrara que si el Teorema vale para todos los casos *en* un punto dado cualquiera, entonces vale para todos los casos en el punto que sigue a continuación.)

Demostración propiamente dicha

Sea Γ un conjunto cualquiera de fórmulas de P. Sea A una fórmula cualquiera de P. Sea D una derivación en SP de una fórmula B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$. D es una cadena finita de fórmulas. Si en D hay n fórmulas, sean éstas, $D_1 \cdots D_n$ en el orden en que aparecen en D; diremos en tal caso que D tiene una *longitud n.*

Base: $n = 1$

Sea D una derivación en SP de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que tiene una longitud de una fórmula. Mostraremos cómo, dado D, podemos construir una derivación, a la que llamaremos D′ (y que no tiene por qué ser de longitud 1), de $A \supset B$ a partir sólo de Γ.

Puesto que D es una derivación de B tiene una longitud de una fórmula, en este caso D tiene que consistir simplemente en la misma fórmula B. Esto es:

$$D = D_n = D_1 = B.$$

Puesto que en D no existe ninguna fórmula que preceda a B, B no puede ser una consecuencia inmediata en SP de fórmulas que le precedan. Luego, por la definición de derivación en SP [secc. 22] B debe ser un axioma o un elemento del conjunto $\Gamma \cup \{A\}$. Luego tenemos que considerar tres casos:

1. B es un axioma.
2. B está en el [es decir, es un elemento del] conjunto Γ.
3. B es el mismo A.

Mostramos, en cada uno de estos casos, cómo se construye una derivación D′ que tenga a $A \supset B$ como su última fórmula y que satisfaga la condición de que sea una derivación a partir sólo de Γ.

Caso 1. B es un axioma. Entonces D′ es la derivación (de longitud 3)

[1] B [Axioma, *ex hypothesi*]

[2]	$B \supset (A \supset B)$	[Axioma, por SP 1]
[3]	$A \supset B$	[MP, 1, 2]

En este caso, D' (no es meramente una derivación, sino que) es una demostración en SP, y también, por lo tanto, una derivación en SP de su última fórmula a partir de *cualquier* conjunto de fórmulas de P [cfr. 23.5]. [Lo que hemos hecho en este caso es describir en el metalenguaje una secuencia de fórmulas que es una demostración en SP. Naturalmente, 'A' y 'B' no son símbolos de P.]

Caso 2. B es un elemento del conjunto Γ. Luego D' será

[1]	B	[Dado como un elemento de Γ]
[2]	$B \supset (A \supset B)$	[Axioma, por SP 1]
[3]	$A \supset B$	[MP, 1, 2]

Caso 3. B es el mismo A. Entonces $A \supset B$ es $A \supset A$ y D' es

[1]	$A \supset ((A \supset A) \supset A)$	[Axioma, por SP 1]
[2]	$(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$	[Axioma, por SP 2]
[3]	$(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$	[MP, 1, 2]
[4]	$A \supset (A \supset A)$	[Axioma, por SP 1]
[5]	$A \supset A$	[MP, 4, 3]

Esta es una demostración de $A \supset A$ en SP, y por lo tanto es automáticamente una derivación en SP de $A \supset A$ a partir de cualquier conjunto arbitrario de fórmulas de P.

Paso de la Inducción

Supongamos que el Teorema de Deducción vale para toda derivación que tenga una longitud menor de *k*.

Hay que demostrar, sobre la base de este supuesto, que vale también para toda derivación que tenga una longitud *k*.

Sea D cualquier derivación de B a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ que tiene una longitud *k*. Tenemos que considerar cuatro casos:

1. B es un axioma.
2. B es el conjunto Γ.
3. B es el mismo A.
4. B es una consecuencia inmediata por MP de dos fórmulas que le preceden en D.

Casos 1-3. D' es exactamente igual que en la Base.

Caso 4. B es una consecuencia inmediata por MP de dos fórmulas que le preceden en D.

Sean esas dos fórmulas D_i y D_j, donde $i < k$ y $j < k$ (puesto que tanto D_i como D_j preceden a B, y B es D_k). Entonces, o bien D_i es $D_j \supset B$, o bien D_j es $D_i \supset B$, puesto que de otra forma B no sería una consecuencia inmediata por MP de D_i y D_j. Como no importa qué alternativa escojamos de las dos, vamos a suponer a partir de ahora que D_j es $D_i \supset B$.

La longitud de la derivación de D_i a partir de $\Gamma \cup \{A\}$ es menor que k. Luego, por el supuesto del Paso de la Inducción, tenemos

1 $\Gamma \vdash_{SP} A \supset D_i$

[A partir de Γ, $A \vdash_{SP} D_i$, por la hipótesis de la inducción]

De igual forma tenemos

2 $\Gamma \vdash_{SP} A \supset D_j$; es decir $\Gamma \vdash_{SP} A \supset (D_i \supset B)$

Pero

3 $\vdash_{SP} (A \supset (D_i \supset B)) \supset ((A \supset D_i) \supset (A \supset B))$

[Axioma, por SP 2]

Por lo tanto, usando 23.4 y 23.5 sobre 2 y 3

4 $\Gamma \vdash_{SP} (A \supset D_i) \supset (A \supset B)$

y usando de nuevo 23.4 y 23.5 sobre 1 y 4

5 $\Gamma \vdash_{SP} A \supset B$

que es lo que queríamos obtener.

Esto completa el Paso de la Inducción, y con él la demostración del Teorema de Deducción para SP.

[Hemos mostrado (en la Base) que el Teorema de Deducción vale para todas las derivaciones de longitud 1, y también hemos mostrado (en el Paso de la Inducción) que *si* vale para todas las derivaciones de longitud menor que k (donde k es un número cualquiera), *entonces* vale para todas las derivaciones de longitud k. Y esto significa que hemos mostrado que el Teorema vale para derivaciones en SP de cualquier longitud finita, es decir, para *todas* las derivaciones en SP.]

Un análisis de esta demostración del Teorema de Deducción mostrará que las únicas propiedades especiales de SP a las que hemos recurrido son las siguientes:

1. Cualquier fbf que tenga la forma $A \supset (B \supset A)$ es un teorema.
2. Cualquier fbf que tenga la forma $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ es un teorema.

3. El Modus Ponens para $\supset$ es la *única* regla de inferencia.

Luego nuestra demostración muestra que el Teorema de Deducción valdrá en cualquier otro sistema formal que tenga estas tres propiedades (utilizaremos esta indicación más adelante).

Resulta claro que si $\vdash_{SP} A \supset B$ entonces $A \vdash_{SP} B$. A partir de esta verdad y del Teorema de Deducción obtenemos el útil metateorema:

26.2 $A \vdash_{SP} B$ *sii* $\vdash_{SP} A \supset B$

27. Nota acerca de las demostraciones por inducción matemática

Resulta importante obtener correctamente el valor de n en la Base. Lo que queremos demostrar en un argumento inductivo es que algo vale para *todos los casos posibles*. Demostramos esto mostrando (*a*) que vale para el caso más pequeño posible, y (*b*) que, para un caso cualquiera, si vale para ese caso, vale entonces para el caso más grande siguiente. Con el Teorema de Deducción el caso más pequeño posible era el caso en el que $n = 1$ [nos estábamos ocupando de derivaciones, y una cadena de fórmulas que tuviera una longitud menor que 1 no sería una derivación]. Pero no siempre sucede así. En posteriores demostraciones por inducción matemática nos encontraremos con Bases en las que el caso más pequeño posible es el caso en que $n = 0$. Así, por ejemplo, el caso más pequeño posible cuando estamos ocupándonos del número de conectivas de una fórmula de P es el caso en el que la fórmula no tiene *ninguna* conectiva [en ese caso la fórmula es un único símbolo proposicional sin negación]. Si en la Base tomamos $n = 1$ cuando hubiéramos debido tomar $n = 0$, nuestra 'demostración' no demostrará aquello que queremos que demuestre: nos habremos olvidado de un caso posible.

EJERCICIOS

1. Dar una demostración por inducción matemática del Teorema de Interpolación [20.6]:

Si $\vdash_P A \supset B$ *y A y B tienen al menos un símbolo proposicional en común, entonces existe una fórmula C de P, cuyos símbolos aparecen, todos ellos, tanto en A como en B, de forma que* $\vdash_P A \supset C$ *y* $\vdash_P C \supset B$

[Una pista: Utilícese una inducción matemática sobre el número n de símbolos proposicionales que están en A y no están en B.]

2. Demostrar mediante inducción matemática que cualquier tabla de verdad de cuatro filas de cualquier fórmula A cuyas únicas conectivas son $\sim$ y $\equiv$ debe tener en su columna final o bien todo V o bien todo F, o bien dos V y dos F. [Una pista: Utilícese una inducción matemática sobre el número n de apariciones de conectivas en A.]

RESPUESTAS

1. *Demostración*

Base: $n=0$

Entonces C es el mismo A.

Paso de la Inducción

Supongamos que el Teorema vale en todos los casos en los que $n < k$. Hay que mostrar que vale en todos los casos en los que $n=k$.

Sea A una fórmula tal que $\vdash_P A \supset B$ y A contiene k símbolos proposicionales que no aparecen en B. Sea p uno de esos símbolos. Sea q un símbolo proposicional cualquiera que aparece en A y en B. Sean A_1 y A_2 las fórmulas que resultan de substituir p en A por $(q \supset q)$ y $\sim(q \supset q)$ respectivamente. Entonces $\vdash_P A_1 \supset B$ y $\vdash_P A_2 \supset B$. Luego (por un clásico razonamiento según tablas de verdad) $\vdash_P (\sim A_1 \supset A_2) \supset B$. Pero $(\sim A_1 \supset A_2) \supset B$ tiene exactamente $k-1$ símbolos proposicionales en A que no están en B. Luego podemos aplicarle la hipótesis de la inducción. Luego existe alguna fórmula C, que contiene sólo símbolos proposicionales comunes a $(\sim A_1 \supset A_2)$ y a B, tal que $\vdash_P (\sim A_1 \supset A_2) \supset C$ y $\vdash_P C \supset B$. Luego, dadas las definiciones de A_1 y A_2, por un razonamiento clásico según tablas de verdad, se sigue que $\vdash_P A \supset C$. [Hay que pensar en $\sim A_1 \supset A_2$ como si fuera $A_1 \vee A_2$.]

[Esta última etapa del argumento consiste en mostrar que

$$(((\sim A_1 \supset A_2) \supset C) \wedge (C \supset B)) \supset (A \supset C)$$

es una tautología. Unos cálculos triviales muestran que esta fórmula sólo puede *dejar de* ser una tautología si A adopta el valor V mientras que tanto A_1 como A_2 adoptan el valor F. Pero de nuestras definiciones de A_1 y A_2 se sigue que, si A tiene el valor V, o bien A_1 o bien A_2 deben tener también el valor V.]

2. *Demostración*

Base: $n=1$ (Si $n=0$, la tabla de verdad sólo tendría dos filas).

Entonces A tiene que ser de la forma $B \equiv C$, donde B y C son símbolos proposicionales distintos (si no lo son, la tabla sólo tendrá dos filas) (A no puede ser de la forma $\sim B$, donde B no tiene conectivas, puesto que, entonces, A tendría de nuevo una tabla con sólo dos filas).

Entonces la tabla es

B	C	$B \equiv C$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

que satisface el Teorema.

Paso de la Inducción

Supongamos que el Teorema vale para todas las fórmulas que tienen menos de *k* apariciones de conectivas. Hay que mostrar que vale para todas las fórmulas que tienen *k* apariciones.

2 casos: 1. A es $\sim B$.
2. A es $B \equiv C$.

Caso 1: A es $\sim B$.
Obvio.

Caso 2: A es $B \equiv C$.
9 subcasos:

1. B tiene todo V, C tiene todo V.
2. B tiene todo V, C tiene todo F.
3. B tiene todo V, C tiene dos V y dos F.
4. B tiene todo F, C tiene todo V.
5. B tiene todo F, C tiene todo F.
6. B tiene todo F, C tiene dos V y dos F.
7. B tiene dos V y dos F, C tiene todo V.
8. B tiene dos V y dos F, C tiene todo F.
9. B tiene dos V y 2 F, C tiene dos V y dos F.

Los subcasos 1-8 son obvios. El subcaso 9 puede demostrarse recorriendo todas y cada una de las finitas combinaciones posibles.

28. Algunos metateoremas de la teoría de modelos acerca de SP

28.1 *Todo axioma de SP es lógicamente válido*

Demostración. Para una interpretación cualquiera I, una fórmula A cualquiera es verdadera o falsa. Luego, aunque los tres esquemas de axioma de SP representan un conjunto infinito de axiomas, los A, B y C de esos esquemas ocupan el lugar de fórmulas que sólo pueden ser verdaderas o falsas para cualquier interpretación dada. Luego para cada esquema de axiomas sólo tenemos que considerar un número finito de posibilidades; por ej., para el esquema SP 1 tenemos que considerar las cuatro posibilidades siguientes:

(1) A es verdadera y B es verdadera;
(2) A es falsa y B es verdadera;
(3) A es verdadera y B es falsa;
(4) A es falsa y B es falsa.

En cada caso, $A \supset (B \supset A)$ resulta verdadera: es decir, cualquier fórmula de P que sea un axioma de SP por SP 1 será verdadera para cualquier interpretación. De igual manera sucede con los esquemas SP 2 y SP 3.

28.2 *La regla de inferencia de SP preserva la validez lógica.*
[es decir, todas las fórmulas que, en virtud de ella, sean una consecuencia inmediata de dos fórmulas que sean ambas lógicamente válidas, serán, a su vez, lógicamente válidas]

Demostración. Directamente a partir de 19.6 (si $\models_P A$ y $\models_P A \supset B$, entonces $\models_P B$].

28.3 *Todo teorema de SP es lógicamente válido* [*es decir, si* $\vdash_{SP} A$, *entonces* $\models_P A$].
Demostración. Directamente a partir de 28.1 y 28.2.

En efecto, la demostración de este metateorema constituye una bonita demostración de la consistencia simple y absoluta de SP. Absoluta porque existe al menos una fórmula de P que no es lógicamente válida y por lo tanto, por 28.3, no es un teorema de SP. Simple, porque para ningún par de fórmulas A y $\sim A$ sucede que ambas sean lógicamente válidas; luego, por 28.3, para ningún par de fórmulas A y $\sim A$ sucede que tanto A como $\sim A$ sean teoremas de SP.

28.4 *Si A es una consecuencia sintáctica en SP de un conjunto* Γ *de fórmulas de P, entonces A es una consecuencia semántica del conjunto* Γ *de fórmulas de P* [*es decir, si* $\Gamma \vdash_{SP} A$, *entonces* $\Gamma \models_P A$]

Demostración. Supongamos $\Gamma \vdash_{SP} A$. Entonces, por 23.7, existe un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash_{SP} A$.

(i) Si Δ es vacío, entonces $\vdash_{SP} A$ y, por lo tanto, por 28.3, $\nvdash_P A$ y, por lo tanto $\Gamma \nvdash_P A$ (por 20.5).

(ii) Si Δ no es vacío, sean $A_1 \ldots, A_n$ ($n \geqslant 1$) los elementos de Δ. Entonces, $A_1 \ldots A_n \vdash_{SP} A$. Por lo tanto, por el Teorema de Deducción, aplicado tantas veces como resulte necesario, $\vdash_{SP} A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots (A_n \supset A)))$ [naturalmente, si $n = 1$ el resultado será $\vdash_{SP} A_1 \supset A$]. Por lo tanto, por 28.3, $\vdash_P A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots (A_n \supset A)))$. Por lo tanto, por la cláusula 3 de la definición de *verdadero para una interpretación de P*, no existe ningún modelo de $\{A^1, \ldots, A^n\}$, es decir, de Δ, que no sea también un modelo de A. Por lo tanto, puesto que Δ es un subconjunto de Γ, no existe ningún modelo de Γ que no sea también un modelo de A; es decir, o bien Γ no tiene ningún modelo, o bien todo modelo de Γ es también un modelo de A: es decir $\Gamma \models_p A$.

Puede verse una demostración de la afirmación conversa de 28.4 [es decir, una demostración de que si $\Gamma \models_p A$, *entonces* $\Gamma \vdash_{SP} A$] más adelante, en 32.14.

28.5 *El Modus Ponens para* $\supset$ *preserva la* (*característica de ser*) *verdad para una interpretación I* [*es decir, si I es un modelo tanto de A como de* $A \supset B$, *entonces es un modelo de B: es decir, el Modus Ponens preserva la modelicidad*].

Demostración. Supongamos que no. Entonces, para alguna interpretación I, tanto A como $A \supset B$ serían verdaderas, mientras que B no sería verdadera. Pero esto es imposible. [También podríamos haber apelado simplemente a 19.5].

Utilizaremos posteriormente este metateorema, especialmente en la secc. 35.

29. Conceptos de completud semántica. Importancia para la lógica de una demostración de la adecuación y de la completud semántica de un sistema formal de la lógica proposicional veritativo-funcional

La completud en general

Digamos por ahora que un sistema es completo si todo aquello que queremos que sea un teorema es un teorema. 'Como sucede en el caso de la consistencia, la noción de *completud* de un sistema logístico tiene una

motivación semántica, que consiste más o menos en la intención de que el sistema tenga todos los teoremas posibles que no estén en conflicto con la interpretación... Esto conduce a varias definiciones puramente sintácticas de completud... (Church, 1956, p. 109). No consideraremos las nociones sintácticas de completud hasta la secc. 33, y nos limitaremos en esta sección y en las próximas a las nociones semánticas de completud.

¿Qué es lo que quieren los lógicos? El Santo Grial de la lógica sería un sistema o conjunto de sistemas que abarcaran todas las verdades de la lógica pura. Nadie lo ha conseguido todavía. ¿Y si lo dejamos en *todas* las verdades de la lógica proposicional pura? Pero éstas incluyen verdades lógicas que no son veritativo-funcionales, y la tarea de sistematizar éstas todavía no ha acabado (apenas ha comenzado). Preguntemos entonces: De aquello que queremos, ¿qué es lo que tenemos alguna esperanza de alcanzar? En este caso la respuesta es 'Todas las verdades de la lógica proposicional veritativo-funcional pura'. Mostraremos que existe un sentido en el cual SP no abarca todas las verdades de la lógica proposicional veritativo-funcional pura. Vamos a intentar dejar claro qué sentido es éste.

En primer lugar, el lenguaje P de SP es adecuado para la expresión de cualquier función de verdad [21.1]. Esto no significa que P sea capaz de expresar cualquier verdad acerca de funciones de verdad: por ejemplo, no puede expresar la verdad que afirma que existe una cantidad enumerable de funciones de verdad distintas. Y esto no significa que toda tautología veritativo-funcional (en sentido intuitivo) pertenezca a P, puesto que P sólo tiene las dos conectivas $\sim$ y $\supset$ y, en consecuencia, por ejemplo la tautología $\sim(p' \wedge \sim p')$ no pertenece a P. Pero a partir de las demostraciones de los metateoremas 21.1 y 21.2 podemos obtener lo siguiente: Primero, podría establecerse una correlación entre cualquier fórmula veritativo-funcional F y una única fórmula en forma normal disyuntiva que tenga la misma tabla de verdad. [Para obtener la exclusividad (uniqueness-unicidad) tendríamos que haber añadido reglas, cuyo establecimiento resulta molesto pero que no ofrecen en principio ninguna dificultad, acerca del orden en el que hay que considerar las distintas fórmulas y los distintos pasos.] Segundo, puede establecerse una correlación entre cualquiera de tales fórmulas en FND y una única fórmula de P que tenga la misma tabla de verdad. Nada de lo que estamos diciendo asegura que exista una correlación uno a uno entre F y la fórmula de P: podría establecerse una correlación entre dos o más fórmulas distintas, digamos F y F', y la misma fórmula de P. No obstante, respecto

a cualquier fórmula F estaría correlacionada, de una forma que esperamos que el lector admita como razonablemente natural, una única fórmula de P que tenga la misma tabla de verdad. Así (pretendemos que):

> Toda fórmula veritativo-funcional está (puede estar) representada de una forma natural por alguna fórmula de P.

En segundo lugar, mostraremos (en la secc. 31) que toda tautología de P es un teorema de SP. Lo cual, considerado conjuntamente con lo que acabamos de decir, arroja el siguiente resultado:

> Toda tautología veritativo-funcional está (puede estar) representada de una forma natural mediante algún teorema de SP.

Este resultado hubiera llenado de satisfacción a los lógicos estoicos, que fueron los primeros que trabajaron sistemáticamente en la lógica proposicional veritativo-funcional, y los primeros que proclamaron la completud de su estudio.[10]

Según esto, vamos a definir la siguiente noción de completud para sistemas formales cualesquiera de la lógica proposicional veritativo-funcional:

Definición. Un sistema formal S que tenga un lenguaje L es *complemento respecto a la clase de todas las tautologías veritativo-funcionales* sii (1) L es adecuado para la expresión de cualquier función de verdad y (2) toda tautología de L es un teorema de S.

De igual forma para SP:

Definición. SP es *completo respecto a la clase de todas las tautologías veritativo-funcionales* sii (1) P es adecuado para la expresión de cualquier función de verdad y (2) toda tautología de P es un teorema de SP.

Es habitual en la literatura lógica que las demostraciones de completud supongan tácitamente resultados conocidos acerca de la adecuación [para expresar cualquier función de verdad] y que se limiten sencillamente a mostrar que toda tautología susceptible de ser expresada en el lenguaje del sistema es un teorema. Seguiremos esta costumbre y, por lo tanto, teniendo en cuenta que, en el caso de P, el conjunto de las tautologías es el mismo que el conjunto de todas las fórmulas lógicamente válidas, formulamos la siguiente definición:

Definición. SP es *semánticamente completo* sii toda fórmula lógicamente válida de P es un teorema de SP [es decir, sii si $\models_P A$ entonces $\vdash_{SP} A$].

Una indicación acerca de la terminología

Puesto que no existe ninguna terminología en la que estén de acuerdo todos los autores, la frase 'completud semántica' no será interpretada por todos ellos de la misma manera. Muchos hablan simplemente de 'completo', y dan a continuación una explicación breve. En todos casos dejan que el contexto revele cuál es el sentido de 'completo' que ellos proponen.

Sobre las demostraciones de completud semántica de los sistemas formales de la lógica proposicional veritativo-funcional

Todas las demostraciones de la *consistencia* de sistemas formales de la lógica proposicional veritativo-funcional son básicamente iguales a la de Post. Pero las demostraciones correspondientes de *completud semántica* son más complicadas y más variadas. Sin contar las demostraciones que hacen uso de la topología o del álgebra, que caen fuera de alcance de este libro, existen al menos siete demostraciones diferentes en la literatura lógica: por ej., las de Post (1920), Lukasiewicz (por ej., 1929), László Kalmar (1935), W. V. Quine (1937), Leo Henkin (1947), Kurt Schütte (1950), y Alan Ross Anderson y Nuel Belnap (1959).

30. Esquema de la demostración de Post de la completud semántica de un sistema formal de lógica proposicional veritativo-funcional

La primera demostración de completud semántica (a menos que los estoicos la hubieran obtenido antes: ver la sección precedente) fue presentada por Emil Post en 1920 para el sistema proposicional de los *Principia Mathematica.* En principio es sencilla, pero resulta laborioso desarrollarla en detalle. El mismo Post, en su artículo de 1921, sólo le dedica una página y media. Pero su presentación incluye rápidos bosquejos de cuatro procesos de inducción matemática, y la aceptación como teoremas de un cierto número de tautologías [Post hubiera podido dar por establecidas las demostraciones de esos teoremas del sistema puesto que todas ellas estaban en los *Principia Mathematica*]. Si nosotros tuviéramos que dar demostraciones en SP de todos los teoremas correspondientes, y si tuviésemos además que presentar los procesos de inducción tan detalladamente como lo hicimos en la secc. 26, nuestra demostración sería bastante larga. Por ello, puesto que más adelante presentaremos de forma completa tres demostraciones diferentes, nos contentaremos en este caso con esbozar la demostración de Post.

Esquema de la demostración de Post

En lo que respecta a la formulación de Whithehead-Russell del cálculo proposicional (al que llamaremos 'PM'):

(1) Post ofrece un método efectivo para encontrar, para cualquier fórmula A de PM, una fórmula A_D que esté en forma normal disyuntiva [FND] y para la cual $\vdash_{PM} A_D \equiv A$.

(2) Post ofrece un método efectivo para demostrar en PM cualquier tautología de PM que esté en FND.

Supongamos ahora que A es una tautología de PM. Si ya está en FND, entonces, por (2), existe un procedimiento que permite su demostración en PM. Si no está en FND, entonces, por (1), existe un procedimiento que permite encontrar una fórmula A_D que esté en FND tal que $\vdash_{PM} AD \equiv A$, y, por (2), existe un procedimiento para demostrar A_D en PM. Así tenemos:

$$\vdash_{PM} A_D$$
$$\vdash_{PM} A_D \equiv A$$

Y a partir de ello obtenemos:

$$\vdash_{PM} A$$

Pero A era una tautología *cualquiera* de PM. Luego:

Si A es una tautología cualquiera de PM, entonces A es un teorema de PM, es decir, PM es semánticamente completo.

Nota: La demostración de Post no sólo nos dice *que* $\vdash_{PM} A$ (cuando A es una tautología de PM); también nos ofrece un procedimiento para construir una demostración de A en PM.

31. Demostración de la completud semántica de SP por el método de Kalmár

Esta demostración fue presentada por primera vez por Lázsló Kalmár en 1935, para un sistema que tenía conectivas adicionales y algunos axiomas distintos.

Para desarrollar la demostración necesitamos saber que, para fórmulas cualesquiera A, B y C de P, las siguientes fórmulas son teoremas de SP:

[Número 1] $A \supset A$
[Número 2] $A \supset (B \supset A)$

[Número 3] $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
[Número 4] $\sim A \supset (A \supset B)$
[Número 5] $A \supset \sim \sim A$
[Número 6] $A \supset (\sim B \supset \sim (A \supset B))$
[Número 7] $(A \supset B) \supset ((\sim A \supset B) \supset B)$

Una demostración tipo Kalmár resultará adecuada para cualquier sistema en el cual todas las fórmulas que se ajusten a cualquiera de estos siete patrones sean teoremas y MP sea una regla de inferencia. Mostrar que todas las fórmulas de P se ajustan a cualquiera de esis siete patrones es un ejercicio bastante pesado que no incluye ninguna nueva idea fundamental. El lector que sólo busca las ideas básicas de la demostración podría saltarse las siguientes páginas para ir directamente al enunciado del lema que constituye el corazón de la demostración, es decir, el metateorema 31.14 de la p.

Ya hemos demostrado el Número 1 en el curso de la demostración del Teorema de Deducción en la secc. 26 (ver el Caso 3 de la Base: p.)[12]. Los números 2 y 3 son precisamente los esquemas de axioma SP 1 y SP 2. Por lo tanto, sólo falta por demostrar los Números 4-7. Si demostramos antes el metateorema 31.1, éste nos servirá de ayuda para la demostración de esos cuatro metateoremas.

Las demostraciones de los Números 4-7 son demostraciones en el metalenguaje que tienen por objeto comprobar que ciertas fórmulas son teoremas de SP.

En lo que sigue, A, B y C han de ser fórmulas cualesquiera de P. Para ahorrar tinta, eliminaremos el subíndice SP de $\vdash$.

31.1. $A \supset B,\ B \supset C \vdash A \supset C$

Demostración. La cadena formada por esas fórmulas es una derivación en SP de C a partir de $\{A \supset B,\ B \supset C,\ A\}$:

1	A	[Supuesto]
2	$A \supset B$	[Supuesto]
3	B	[MP, 1, 2]
4	$B \supset C$	[Supuesto]
5	C	[MP, 3, 4]

Por lo tanto, $A \supset B,\ B \supset C,\ A \vdash C$. Por lo tanto, por el Teorema de Deducción $A \supset B,\ B \supset C \vdash A \supset C$.

Abreviaremos 'Teorema de Deducción' mediante 'TD'.

31.2. [Número 4] $\vdash \sim A \supset (A \supset B)$

Demostración	1	$\vdash \sim A \supset (\sim B \supset \sim A)$	[SP 1]
	2	$\vdash (\sim B \supset \sim A) \supset (A \supset B)$	[SP 3]
Luego	3	$\vdash \sim A \supset (A \supset B)$	31.1, 1, 2]

También podemos usar la demostración formal de $\sim p' \supset (p' \supset p'')$ dada en el ejemplo 3 de las pp. - , secc. 22, para proporcionar la base de una demostración en el metalenguaje de que $\vdash \sim A \supset (A \supset B)$

31.3. $\vdash \sim \sim A \supset A$

Demostración	1	$\vdash \sim \sim A \supset (\sim A \supset \sim \sim \sim A)$	[31.2 = Núm 4]
	2	$\vdash (\sim A \supset \sim \sim \sim A) \supset (\sim \sim A \supset A)$	[SP 3]
Luego	3	$\vdash \sim \sim A \supset (\sim \sim A \supset A)$	[31.1, 1, 2]
	4	$\vdash (\sim \sim A \supset (\sim \sim A \supset A)) \supset ((\sim \sim A \supset \sim \sim A) \supset (\sim \sim A \supset A))$	[SP 2]
Luego	5	$\vdash (\sim \sim A \supset \sim \sim A) \supset (\sim \sim A \supset A)$	[MP, 3, 4]
	6	$\vdash \sim \sim A \supset \sim \sim A$	[Núm. 1]
Luego	7	$\vdash \sim \sim A \supset A$	[MP, 5, 6]

31.4. [Número 5] $\vdash A \supset \sim \sim A$

Demostración	1	$\vdash \sim \sim \sim A \supset \sim A$	[31.3]
	2	$\vdash (\sim \sim \sim A \supset \sim A) \supset (A \supset \sim \sim A)$	[SP 3]
Luego	3	$\vdash A \supset \sim \sim A$	[MP, 1, 2]

31.5. $\sim \sim A,\ A \supset B \vdash \sim \sim B$

Demostración. $\sim \sim A \vdash \sim \sim A \supset A$, puesto que $\vdash \sim \sim A \supset A$. Luego existe una derivación que comienza por $\sim \sim A$ y acaba en $\sim \sim A \supset A$, que vamos a representar de la siguiente forma (pasos 1 y 2):

1	$\sim \sim A$	[Supuesto]
	. . .	[Hueco que tiene que rellenarse con alguna demostración de $\sim \sim A \supset A$, por ej., igual que indicamos en la demostración del metateorema 31.3]
2	$\sim \sim A \supset A$	[31.3]

Y sigue:

3	A	[MP, 1, 2]

4	$A \supset B$	[Supuesto]
5	B	[MP, 3, 4]
	...,	[Hueco que tiene que rellenarse con alguna demostración de $B \supset \sim\sim B$, por ej., como se indicó en la demostración de 31.4]
6	$B \supset \sim\sim B$	[31.4]
7	$\sim\sim B$	[MP, 5, 6)

Luego $\sim\sim A, A \supset B \vdash \sim\sim B$

31.6. $\vdash (A \supset B) \supset (\sim\sim A \supset \sim\sim B)$

Demostración. Por 31.5 y dos aplicaciones del Teorema de Deducción.

31.7. $\vdash (A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$

Demostración	1	$\vdash (A \supset B) \supset (\sim\sim A \supset \sim\sim B)$	[31.6]
	2	$\vdash (\sim\sim A \supset \sim\sim B) \supset (\sim B \supset \sim A)$	[SP 3]
Luego	3	$\vdash (A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$	[31.1, 1, 2]

31.8. [Número 6] $\vdash A \supset (\sim B \supset \sim (A \supset B))$

Demostración. Por MP, A, $A \supset B \vdash B$. Por lo tanto, por dos aplicaciones de TD:

	1	$\vdash A \supset ((A \supset B) \supset B))$	
	2	$\vdash ((A \supset B) \supset B) \supset (\sim B \supset \sim (A \supset B))$	[31.7]
Luego	3	$\vdash A \supset (\sim B \supset \sim (A \supset B))$	[31.1, 1, 2]

31.9. $\vdash (\sim A \supset A) \supset (B \supset A)$

Demostración	1	$\vdash \sim A \supset (A \supset \sim B)$	[N.º 4 = 31.2]
	2	$\vdash (\sim A \supset (A \supset \sim B)) \supset$ $((\sim A \supset A) \supset (\sim A \supset \sim B))$	(SP 2]
Luego	3	$\vdash (\sim A \supset A) \supset \sim A \supset \sim B)$	MP, 1, 2]
	4	$\vdash (\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A)$	[SP 3]
Luego	5	$\vdash (\sim A \supset A) \supset (B \supset A)$	[31.1, 3, 4]

31.10. $\vdash (\sim A \supset A) \supset A$

Demostración	1	$\vdash (\sim A \supset A) \supset ((\sim A \supset A) \supset A)$	[31.9]
	2	$\vdash ((\sim A \supset A) \supset ((\sim A \supset A) \supset A)) \supset$ $(((\sim A \supset A) \supset (\sim A \supset A)) \supset ((\sim A \supset A) \supset A))$	[SP 2]
Luego	3	$\vdash ((\sim A \supset A) \supset (\sim A \supset A)) \supset$ $((\sim A \supset A) \supset A)$	[MP, 1, 2]

	4	$\vdash(\sim A \supset A) \supset (\sim A \supset A)$	[N.º 1]
Luego	5	$\vdash(\sim A \supset A) \supset A$	[MP, 3, 4]

31.11. $\vdash(\sim B \supset \sim A) \supset ((\sim A \supset B) \supset (\sim B \supset B))$

Demostración. La siguiente secuencia es una derivación en SP de B a partir de $\{\sim B \supset \sim A,\ \sim A \supset B,\ \sim B\}$:

1	$\sim B$	[Supuesto]
2	$\sim B \supset \sim A$	[Supuesto]
3	$\sim A$	[MP, 1, 2]
4	$\sim A \supset B$	[Supuesto]
5	B	[MP, 3, 4]

Luego $\sim B \supset \sim A,\ \sim A \supset B,\ \sim B \vdash B$. Por lo tanto, por tres aplicaciones de TD, $\vdash(\sim B \supset \sim A) \supset ((\sim A \supset B) \supset (\sim B \supset B))$.

31.12. $A \supset B,\ \sim A \supset B \vdash B$

Demostración. La siguiente secuencia es una derivación de B a partir de $\{A \supset B, \sim A \supset B\}$:

1	$A \supset B$	[Supuesto]
...	[Hueco que tiene que ser rellenado con una demostración de $(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$, como se ha indicado, por ej., en la demostración de 31.7]	
2	$(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$	[31.7]
3	$\sim B \supset \sim A$	[MP, 1, 2]
	...	[Encajar aquí la demostración de 31.11]
4	$(\sim B \supset \sim A) \supset$ $((\sim A \supset B) \supset (\sim B \supset B))$	[31.11]
5	$(\sim A \supset B) \supset (\sim B \supset B)$	[MP, 3, 4]
6	$\sim A \supset B$	[Supuesto]
7	$\sim B \supset B$	[MP, 5, 6]
	...	[Encajar aquí la demostración de 31.10, sustituyendo A por B]
8	$(\sim B \supset B) \supset B$	[31.10]
9	B	[MP, 7, 8]

Por lo tanto $A \supset B,\ \sim A \supset B \vdash B$.

31.13 [Número 7] $\vdash(A \supset B) \supset ((\sim A \supset B) \supset B)$

Demostración. A partir de 21.12 por dos aplicaciones del Teorema de Deducción.

Esto completa la demostración de que cualquier fórmula que se ajuste al patrón de cualquiera de los Números 1-7 es una teorema de SP. Ahora podemos seguir adelante para establecer y demostrar el lema que constituye el corazón de la demostración de Kalmár. Lo más difícil de toda la demostración es comprender exactamente qué es lo que establece este lema.

31.14 (*Lema para el teorema de completud semántica*) *Sea A cualquier fórmula de P cuyos únicos símbolos proposicionales distintos sean* $B_1 \ldots B_k$ $(k \geqslant 1)$. *Sea I una interpretación cualquiera de P. I asigna un conjunto de valores de verdad a los símbolos proposicionales de A, es decir, a* $B_1 \ldots B_k$. Definimos B_i^I *de la siguiente forma:*

Si I asigna V a B_i, B_i^I *tiene que ser el mismo* B_i.

Si I asigna F a B_i, B_i^I *tiene que ser* $\sim B_i$.

De igual manera, sea A^I *o bien A o bien* $\sim A$, *según que A sea verdadera o falsa para I. Entonces:*

$B_i^I \ldots B_k^I \vdash_{SP} A^I$

Explicación. Intuitivamente, lo que el lema dice es esto:

Sea A cualquier fórmula de P con k símbolos proposicionales distintos. Escribamos la tabla de verdad de A en la forma habitual. Entonces, para *cada fila* de la tabla de verdad vale en SP una relación de consecuencia sintáctica diferente. Para *cada fila* dicha relación es la siguiente: Si a un símbolo proposicional se le asigna V, entonces lo escribimos a la izquierda del signo $\vdash$; si se le asigna una F, escribimos su negación a la izquierda del signo $\vdash$. Si a A se le asigna V, escribimos A a la derecha del signo $\vdash$. Si a A se le asigna una F, escribimos $\sim$A a la derecha del signo $\vdash$.

Ejemplo. Sea A $(p' \supset \sim p'') \supset \sim p'''$. No importa cuál de los p', p'', p''' tomemos como B_1, B_2, B_3. Sea $B_1 = p'$, $B_2 = p''$ $B_3 = p'''$. Entonces A $= (B_1 \supset \sim B_2) \supset \sim B_3$, y su tabla de verdad es

B_1	B_2	B_3	A
V	V	V	V
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	F
V	V	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
F	F	F	V

Entonces el Lema nos dice que valen *ocho* relaciones de consecuencia sintáctica en el caso de A, esto es:

[Fila 1] $p', p'', p''' \vdash_{SP} (p' \supset \sim p'') \supset \sim p'''$
[Fila 2] $\sim p', p'', p''' \vdash_{SP} \sim((p' \supset \sim p'') \supset \sim p''')$
[Fila 3] $p', \sim p'', p''' \vdash_{SP} \sim((p' \supset \sim p'') \supset \sim p''')$
[Fila 4] $\sim p', \sim p'', p''' \vdash_{SP} \sim((p' \supset \sim p'') \supset \sim p''')$
[Fila 5] $p', p'', \sim p''' \vdash_{SP} (p' \supset \sim p'') \supset p'''$
[Fila 6] $\sim p', p'', \sim p''' \vdash_{SP} (p' \supset \sim p'') \supset \sim p'''$
[Fila 7] $p', \sim p'', \sim p''' \vdash_{SP} (p' \supset \sim p'') \supset \sim p'''$
[Fila 8] $\sim p', \sim p'', \sim p''' \vdash_{SP} (p' \supset \sim p'') \supset \sim p'''$

Resulta vital darse cuenta del siguiente detalle: *Toda relación de consecuencia sintáctica vale simplemente en virtud de las propiedades sintácticas de SP.* Al *demostrar* el Lema nos referimos a interpretaciones de P, pero toda relación de consecuencia sintáctica establecida mediante el Lema *vale independientemente de cualquier interpretación de P.* Así, por ej., las ocho relaciones de consecuencia sintáctica del ejemplo pertenecen a la pura teoría de la demostración de SP, y al establecerlas se eliminan simplemente todas las referencias a interpretaciones de P. La presencia, tanto en el enunciado del Lema como en su demostración, de referencias a interpretaciones de P, tiende a obscurecer este detalle vital.

Demostración del Lema

Se trata de una demostración por inducción sobre el número *n* de conectivas de la fórmula A [Eliminamos el subíndice de $\vdash$.]

Base: $n = 0$.

Entonces A es un único símbolo proposicional sin negación, B_1. Luego el Lema se reduce a $B_1 \vdash B_1$ en el caso de que I asigne V a B_1 [es decir, para la fila de la tabla de verdad en la que obtiene una V] y a $\sim B_1 \vdash \sim B_1$ en el caso en el que I asigna una F a B_1. Estas dos afirmaciones quedan establecidas por 23.1.

Paso de Inducción

Supongamos que el Lema vale para todas las fórmulas que tengan menos de *m* conectivas [ésta es la hipótesis de la inducción]. Hay que demostrar que vale para una fórmula A cualquiera que tenga *m* conectivas.

Hay que considerar los dos casos siguientes:

1. Para alguna fórmula C, A es $\sim$C, donde C tiene menos de *m* conectivas.

2. Para algunas fórmulas C y D, A es C$\supset$D, donde tanto C como D tienen menos de *m* conectivas.

Caso 1: A es $\sim$C, donde C tiene menos de *m* conectivas.

Hay dos subcasos:

1*a.* A es verdadera para I.

1*b.* A es falsa para I.

Subcaso 1a: A es verdadera para I (luego A^I es A).

Entonces C es falsa para I (Luego C^I es $\sim$C).

Puesto que C tiene menos de *m* conectivas, tenemos, por la hipótesis de la inducción

$B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash C^I$

es decir, $B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash \sim C$ (puesto que C^I es en este caso $\sim$C)

es decir $B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash A^I$ (puesto que A^I es en este caso = A = $\sim$C)

Que es lo que queremos.

Subcaso 1b: A es falsa para I (luego A^I es $\sim$A).

Entonces C es verdadera para I (luego C^I es C).

Por la hipótesis de la inducción

$B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash C^I$

es decir $B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash C$ 1

Pero por 31.4 $\vdash C \supset \sim\sim C$ 2

Por lo tanto, por 1, 2 y MP

$B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash \sim\sim C$

es decir $B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash \sim A$

es decir $B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash A^I$

Que es lo que queremos.

Caso 2: A es C$\supset$D, donde tanto C como D tienen menos de *m* conectivas.

3 subcasos:

2*a.* C es falsa para I.

2*b.* D es verdadera para I

2*c.* C es verdadera para I y D es falsa para I

Subcaso 2a: C es falsa para I.

Entonces A es verdadera para I y $A^I = A = C \supset D$.

Por la hipótesis de la inducción:

$$B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash C^I$$

es decir $B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash \sim C$

Pero por 31.2, $\vdash \sim C \supset (C \supset D)$. Luego por MP

$$B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash C \supset D$$

es decir $B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash A^I$, que es lo que queremos.

Subcaso 2b: D es verdadera para I.

Entonces A es verdadera para I y $A^I = A = C \supset D$. Por la hipótesis de la inducción

$$B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash D$$

Pero $\vdash D \supset (C \supset D)$ [SP 1]. Luego por MP

$$B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash C \supset D$$

es decir $B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash A^I$, que es lo que queremos.

Subcaso 2c: C es verdadera para I y D es falsa para I.

Entonces A es falsa para I y $A^I = \sim A = \sim (C \supset D)$. Por la hipótesis de la inducción

$$B_1^I \ldots B_k^I \vdash C \quad \text{y también} \quad B_1^I \ldots B_k^I \vdash \sim D$$

Pero $\vdash C \supset (\sim D \supset \sim (C \supset D))$ [31.8]. Luego por dos aplicaciones de MP

$$B_1^I \ldots B_k^I \vdash \sim (C \supset D)\text{: es decir } B_1^I \ldots B_k^I \vdash A^I.$$

Y con ello da fin el Paso de la Inducción y, a la vez, la demostración del Lema.

31.15 (*Teorema de completud semántica para SP*) *Toda fórmula lógicamente válida de P es un teorema de SP* [*o: Si* $\models_P A$, *entonces* $\vdash_{SP} A$]

Demostración. Sea A una fórmula cualquiera de P que sea lógicamente válida, y que tenga símbolos proposicionales distintos $B_1 \ldots B_k$ $(k \geqslant 1)$.

Sean I y J interpretaciones de P que se diferencian sólo en que I asigna V a B_k mientras que J asigna F a B_k. Entonces, por el Lema

(1) $B_1^I, \ldots, B_k^I \vdash A^I$

y

(2) $B_1^J, \ldots, B_k^J \vdash A^J$.

Y ahora, a partir de nuestras definiciones de I, J, etc. tenemos

(3) $B_1^J = B_1^I, \ldots, B_{k-1}^J = B_{k-1}^I$

(4) $B_k^I = B^k$.

y

(5) $B_k^J = \sim B_k$.

Además, puesto que A es una fórmula lógicamente válida, es verdadera para I y verdadera para J. Luego

(6) $A^I = A^J = A$.

A partir de (1), (4) y (6) obtenemos

(7) $B_1^I, \ldots, B_{k-1}^I, B_k \vdash A$.

A partir de (2), (3), (5) y (6) obtenemos

(8) $B_1^I, \ldots, B_{k-1}^I, \sim B_k \vdash A$.

Aplicando el Teorema de Deducción a (7) y (8) obtenemos

(9) $B_1^I, \ldots, B_{k-1}^I \vdash B_k \supset A$

y

(10) $B_1^I, \ldots, B_{k-1}^I \vdash \sim B_k \supset A$.

Pero tenemos

(11) $\vdash (B_k \supset A) \supset ((\sim B_k \supset A) \supset A)$ [31.13 = Número 7]

Luego por dos aplicaciones de MP obtenemos

(12) $B_1^I, \ldots, B_{k-1}^I \vdash A$.

Hemos eliminado del argumento a B_k. Si $k = 1$, tenemos inmediatamente $\vdash_{SP} A$. Si $k > 1$, entonces sea L una interpretación que se diferencia de I sólo en el valor de verdad que asigna a B_{k-1} (es decir, si I asigna V a B_{k-1}, entonces L asigna F a B_{k-1}; y si I asigna F a B_{k-1}, entonces L asigna V a B_{k-1}). Repitiendo el conjunto de movimientos anteriores, efectuando los cambios que resultan obvios, podemos eliminar y B_{k-1} del argumento, igual que hemos eliminado y B_k. Y así sucesivamente, hasta que hayamos eliminado todo lo que esté a la izquierda del signo $\vdash$ y quede simplemente

$$\vdash_{SP} A$$

Pero A era una fórmula cualquiera lógicamente válida de P. Luego si $\vdash_P A$, entonces $\vdash_{SP} A$.

Q.E.D.

Un análisis de esta demostración de completud muestra que *cualquier* sistema formal con lenguaje P, que tenga el Modus Ponens como regla de inferencia, y que satisfaga las siete condiciones [Número 1-7] será semánticamente completo: Para fórmulas cualesquiera A, B y C

1. $\vdash A \supset A$
2. $\vdash A \supset (B \supset A)$
3. $\vdash (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

4. $\vdash \sim A \supset (A \supset B)$
5. $\vdash A \supset \sim \sim A$
6. $\vdash A \supset (\sim B \supset \sim (A \supset B))$
7. $\vdash (A \supset B) \supset ((\sim A \supset B) \supset B)$

32. Demostración de la completud semántica de SP por el método de Henkin

Vamos a demostrar en esta sección la completud semántica de SP por un método distinto. Lo hacemos así por diversas razones: (1) El método es esencialmente el mismo, aunque más sencillo, que el usado para demostrar la completud semántica del sistema de la lógica de predicados en la Parte 3, y si nos familiarizamos ahora con él resultará después más fácil comprender el patrón general de la demostración más complicada. (2) La demostración utiliza una nueva noción, la de conjunto d-consistente máximo, que resulta de utilidad general. (3) En el curso de la demostración establecemos dos metateoremas muy útiles, uno de los cuales es el Lema de Lindenbaum para SP, y el otro el teorema que afirma que todo conjunto d-consistente de SP tiene un modelo [32.13]. El segundo nos capacita para establecer un enlace completo entre la teoría de la demostración de SP y la teoría de modelos de P, y para demostrar entre otras cosas un teorema de completud 'fuerte' para SP. (4) Finalmente, puesto que algunas partes de la demostración guardan un exacto paralelismo con partes de la posterior demostración de la completud semántica de nuestro sistema de lógica de predicados, podemos acortar el enunciado de esta última demostración citando las partes apropiadas de la correspondiente a la lógica proposicional, sin tener que descender de nuevo a todos los detalles.

La demostración fue presentada por primera vez, para un sistema de lógica de predicados, por Leo Henkin en 1947 [Henkin, 1947]. Las subsecciones (*a*), (*b*), (*c*) y (*d*) establecen cuestiones preliminares que resultan esenciales para la parte principal de la demostración, que colocaremos en la subsección (*e*).

(*a*) *Demostración de que ciertas fórmulas son teoremas de SP*

En la demostración utilizamos el hecho de que, para unas fórmulas cualesquiera A, B, C de P, las siguientes expresiones constituyen teoremas de SP:

1. $A \supset A$
2. $A \supset (B \supset A)$

3. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
4. $\sim A \supset (A \supset B)$
5. $A \supset (\sim B \supset \sim (A \supset B))$
6. $(A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$
7. $(\sim A \supset B) \supset ((\sim A \supset \sim B) \supset A)$

Ya tenemos demostradas las cinco primeras fórmulas [como Números 1, 2, 3, 4 y 6 en la secc. 31]. Vamos a mostrar ahora que también valen las dos últimas [los metateoremas que siguen 32.4 y 32.5]. Comenzaremos estableciendo un metateorema que puede ser considerado como verdadero en virtud de la definición de $\vdash_{SP}$ (de hecho vale para cualquier sistema formal).

32.1 *Si* $A, B \vdash_{SP} C$ *y* $A, C \vdash_{SP} D$, entonces $A, B \vdash_{SP} D$

(Eliminamos en lo que sigue el subscripto de $\vdash$)

32.2 $\vdash (A \supset \sim B) \supset (B \supset \sim A)$

Demostración

	1	$\sim\sim A \supset A,\ A \supset \sim B \vdash \sim\sim A \supset \sim B$	[31.1]
	2	$\vdash (\sim\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset \sim A)$	[SP 3]
Luego	3	$\sim\sim A \supset A,\ A \supset \sim B \vdash B \supset \sim A$	[MP, 1, 2]
Luego	4	$\vdash (\sim\sim A \supset A) \supset ((A \supset \sim B) \supset (B \supset \sim A))$	[3, TD dos veces]
	5	$\vdash \sim\sim A \supset A$	[31.3]
Luego	6	$\vdash (A \supset \sim B) \supset (B \supset \sim A)$	[MP, 5, 4]

32.3 $\vdash (A \supset \sim A) \supset \sim A$

Demostración

	1	$\vdash (A \supset \sim A) \supset (\sim\sim A \supset \sim A)$	[31.7]
	2	$\vdash (\sim\sim A \supset \sim A) \supset \sim A$	[31.10]
	3	$(A \supset \sim A) \supset (\sim\sim A \supset \sim A), (\sim\sim A \supset \sim A) \supset \sim A \vdash (A \supset \sim A) \supset \sim A$	[31.1]
Luego	4	$\vdash ((A \supset \sim A) \supset (\sim\sim A \supset \sim A)) \supset (((\sim\sim A \supset \sim A) \supset \sim A) \supset ((A \supset \sim A) \supset \sim A))$	[3, TD dos veces]
Luego	5	$\vdash ((\sim\sim A \supset \sim A) \supset \sim A) \supset ((A \supset \sim A) \supset \sim A)$	[MP, 1, 4]
Luego	6	$\vdash (A \supset \sim A) \supset \sim A$	[MP, 2, 5]

32.4 $\vdash(A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$

Demostración

	1	$A \supset B,\ B \supset \sim A \vdash A \supset \sim A$	[31.1]
	2	$\vdash (A \supset \sim A) \supset \sim A$	[32.3]
Luego	3	$A \supset B,\ B \supset \sim A \vdash \sim A$	[MP, 1, 2]
	4	$A \supset B,\ A \supset \sim B \vdash A \supset \sim B$	[Propiedad general de $\vdash$: cfr. 23.1 y 23.2]
	5	$\vdash (A \supset \sim B) \supset (B \supset \sim A)$	[32.2]
Luego	6	$A \supset B,\ A \supset \sim B \vdash B \supset \sim A$	[MP, 4, 5]
Luego	7	$A \supset B,\ A \supset \sim B \vdash \sim A$	[32.1, 6, 3]
Luego	8	$\vdash (A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$	[7, TD dos veces]

32.5 $\vdash(\sim A \supset B) \supset ((\sim A \supset \sim B) \supset A)$

Demostración

	1	$\sim A \supset B,\ \sim A \supset \sim B \vdash \sim \sim A$	[Paso 7 de la demostración de 32.4, con $\sim A$ en vez de A]
	2	$\vdash \sim \sim A \supset A$	[31.3]
Luego	3	$\sim A \supset B,\ \sim A \supset \sim B \vdash A$	[MP, 1, 2]
Luego	4	$\vdash (\sim A \supset B) \supset ((\sim A \supset \sim B) \supset A$	[3, TD dos veces]

(*b*) *conjuntos d-consistentes, conjuntos d-consistentes máximos, y algunos teoremas acerca de ellos*

Recordamos al lector que un conjunto Γ de fórmulas de P es un conjunto d-consistente de SP sii para ninguna fórmula A de P sucede tanto $\Gamma \vdash_{SP} A$ como $\Gamma \vdash_{SP} \sim A$.

32.6 *Si un conjunto de fórmulas de P tiene un modelo, entonces es un conjunto d-consistente de SP*

Demostración. Sea Γ cualquier conjunto de fórmulas de P. Supongamos que Γ tiene un modelo, pero que no es un conjunto d-consistente de SP. Entonces, para alguna fórmula A de P sucede que $\Gamma \vdash_{SP} A$ y $\Gamma \vdash_{SP} \sim A$. Entonces, por 28.4, [si $\Gamma \vdash_{SP} A$, entonces $\Gamma \models_P A$] $\Gamma \models_P A$ y $\Gamma \models_P \sim A$; es decir, todo modelo de Γ es un modelo de A y todo modelo de Γ es un modelo de $\sim A$. Pero hemos supuesto que Γ tiene un modelo. Luego en ese modelo A es verdadera y $\sim A$ es verdadera. Pero eso es imposible. Por lo tanto, si Γ tiene un modelo, es un conjunto d-consistente de SP.

La conversa de 32.6 es importante y bonita, pero resulta mucho más difícil demostrarla. Se trata del lema crucial de cualquier demostración de completud tipo Henkin, y nos corresponderá demostrarla en 32.13.

32.7 $\Gamma \cup \{\sim A\}$ *es un conjunto d-inconsistente de SP sii* $\Gamma \vdash_{SP} A$

Demostración

(*a*) Supongamos $\Gamma \vdash_{SP} A$. Entonces $\Gamma, \sim A \vdash_{SP} A$ [23.2]. Pero $\Gamma, \sim A \vdash_{SP} \sim A$ [23.1, 23.2]. Luego $\Gamma \cup \{\sim A\}$ es un conjunto d-inconsistente de SP.

(*b*) Supongamos que $\Gamma \cup \{\sim A\}$ es un conjunto d-inconsistente de SP. Entonces $\Gamma, \sim A \vdash_{SP} B$ y $\Gamma, \sim A \vdash_{SP} \sim B$ para alguna fórmula B. Por lo tanto, por el Teorema de Deducción, $\Gamma \vdash_{SP} \sim A \supset B$ y $\Gamma \vdash_{SP} \sim A \supset \sim B$. Pero $\vdash_{SP} (\sim A \supset B) \supset ((\sim A \supset \sim B) \supset A)$ [32.5]. Luego, por Modus Ponens dos veces, $\Gamma \vdash_{SP} A$.

32.8 $\Gamma \cup \{A\}$ *es un conjunto d-inconsistente de SP sii* $\Gamma \vdash_{SP} \sim A$

Demostración. Igual que en 32.7, pero utilizando 32.4 [$\vdash_{SP} (A \supset B) \supset \supset ((A \supset B) \supset = A)$] en (*b*).

Definición. Γ es un conjunto d-consistente máximo de SP sii Γ es un conjunto d-consistente de SP y, si A es una fórmula cualquiera de P, entonces o bien A es un elemento de Γ, o $\Gamma, A \vdash_{SP} B$ y $\Gamma, A \vdash_{SP} \sim B$ para alguna fórmula B de P.

Desde un punto de vista informal, un conjunto d-consistente máximo de SP es un conjunto d-consistente de SP al que no se le puede añadir ninguna fórmula sin caer en una d-inconsistencia: tiene ya todas las fórmulas que puede abarcar.

32.9 Para cualquier conjunto d-consistente máximo Γ de SP y cualquier fórmula A de P, sólo una de las dos fórmulas A y $\sim A$ está en Γ.

Demostración. Obviamente, ambas no pueden estar en Γ, puesto que Γ es un conjunto d-consistente de SP. Supongamos que no está ninguna de las dos. Entonces, no se puede añadir nada a Γ sin que pierda la d-inconsistentes de SP. Por lo tanto, por 32.8, $\Gamma \vdash_{SP} \sim A$ y, por 32.7 $\Gamma \vdash_{SP} A$; es decir, Γ es un conjunto d-inconsistente de SP. Pero Γ era *ex* $_{SP}A$; es decir, Γ es un conjunto d-inconsistentes de SP. Pero Γ era *ex hipothesi* un conjunto d-consistente. Luego o bien A está en Γ, o bien $\sim A$ está en Γ, pero no los dos.

32.10 *Para cualquier conjunto d-consistente máximo de SP y cualquier fórmula A de P, si* $\Gamma \vdash_{SP} A$, *entonces A es un elemento de* Γ

Demostración. Supongamos $\Gamma \vdash_{SP} A$, sin que A sea un elemento de Γ. Entonces, por 32.9, $\sim A$ es un elemento de Γ. Por lo tanto, $\Gamma \vdash_{SP} \sim A$. Por lo tanto, Γ es un conjunto d-inconsistente de SP. Pero Γ era *ex hypothesi* un conjunto d-consistente. Luego si $\Gamma \vdash_{SP} A$, entonces A es un elemento de Γ.

(*c*) *Teorema de Enumeración para P*

32.11 (*Teorema de Enumeración*) *Las fórmulas de P son efectivamente enumerables*

Demostración. Asignemos al símbolo *p* el numeral 10

" " " " " " 100

Asignemos al símbolo $\sim$ el numeral 1000

" " " $\supset$ " " 10000

" " " (" " 100000

" " ") " " 1000000

[Desde el punto de vista teórico no importa si estos numerales son binarios o decimales, dado que nos mantenemos siempre en el mismo sistema.]

Sea el número de una *fórmula* el número denotado por el numeral al que se llega yuxtaponiendo de izquierda a derecha los numerales de los símbolos de la fórmula, tal y como se hace en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. El número de la fórmula $\sim(p' \supset p'')$ es el número denotado mediante el numeral

10001000001010010000101001001000000

Cada una de las distintas fórmulas de P tendrá así asignado a ella un número entero positivo diferente, y podemos entonces ordenar las fórmulas siguiendo el orden de sus números asociados.

Veremos a continuación que esta enumeración es una enumeración efectiva:

Existe un método efectivo que permite encontrar, para cualquier entero positivo n, la n-ésima fórmula de la enumeración

Demostración. El número más pequeño asignado a una fórmula de P

es el número 10100, que es el número que se asigna a la fórmula p'. Escribamos p' como primera fórmula de la enumeración. Tomemos después los números sucesivos a partir de 10100, comprobando cada uno de ellos para ver si es el número de una fórmula [la definición de fórmula en la secc. 17 puede convertirse en un método efectivo para diferenciar las fórmulas de las no-fórmulas]. Si se trata de una fórmula, la escribimos en nuestra lista, llevando la cuenta de cuántas fórmulas hemos escrito. Si todavía no hemos llegado, pasamos al número siguiente. Cuando escribamos la fórmula n-ésima habremos encontrado lo que queríamos.

Además: Dada cualquier fórmula, existe un método efectivo que permite descubrir para qué número n dicha fórmula es la n-ésima fórmula de la enumeración. (*Demostración.* Hállese el número de la fórmula. Recorramos todos los números a partir de 10100 hasta llegar a ese número, haciendo una lista de todas las fórmulas a las que corresponden dichos números, como en la demostración anterior. El número de fórmulas que hay en la lista, incluyendo la fórmula dada, es el número que buscamos.)

(*d*) *Lema de Lindenbaum para SP*

32.12 (*Lema de Lindenbaum para SP*). *Cualquier conjunto d-consistente de SP es un subconjunto de algún conjunto d-consistente máximo de SP*

[donde 'algún' significa alguno que otro]

Nota histórica. El teorema correspondiente para un sistema de lógica de predicados fue demostrado por primera vez por Adolf Lindenbaum, lógico y matemático polaco asesinado por los nazis durante el verano de 1941 [cf. Tarski, 1923-38, p. 98, Teorema 56).

Demostración. Sea Γ cualquier conjunto d-consistente de SP. Definimos una secuencia infinita de conjuntos $\langle \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \rangle$ de la siguiente forma:

Llamemos Γ a Γ_0. Sea A_{n+1} la $(n+1)$-ésima fórmula de nuestra enumeración [32.11]. Si $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ es un conjunto d-consistente de SP, haremos que el conjunto Γ_{n+1} sea dicho conjunto. En otro caso, Γ_{n+1} será Γ_n.

[Informalmente: Si la primera fórmula de nuestra enumeración puede añadirse, sin merma de consistencia, a Γ, entonces la añadimos a Γ para construir Γ_1; si no puede ser así, entonces Γ_1 tiene que ser el mismo Γ. Si la segunda fórmula de nuestra enumeración puede aña-

dirse a Γ_1 sin merma de la consistencia, entonces la añadimos a Γ_1 para construir Γ_2; si no puede hacerse, entonces Γ_2 tiene que ser el mismo Γ_1. Y así sucesivamente.]

Vamos a demostrar ahora que el conjunto constituido por la unión de todos los conjuntos Γ_0, Γ_1, Γ_2, . . . [es decir, el conjunto $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots$] es un conjunto d-consistente máximo de SP. Sea Γ' este conjunto. Obviamente, Γ es un subconjunto de Γ'. Demostraremos en primer lugar que Γ' es un conjunto d-consistente de SP, y después que es un conjunto d-consistente máximo de SP.

(i) Γ' *es un conjunto d-consistente de SP*

Demostración

(*a*) Cada uno de los Γ_i es d-consistente, ya que, Γ_0 es (*ex hypothesi*) d-consistente y, por la forma en que hemos construido los Γ_i, si Γ_n es d-consistente, entonces también lo es Γ_{n+1}.

(*b*) Supongamos ahora que Γ' es d-inconsistente. Entonces, para alguna fórmula A existe una derivación de A a partir de Γ' y también una derivación de $\sim$A a partir de Γ'. Cada una de esas dos derivaciones consta de un número finito de fórmulas. Sea A_n la fórmula con mayor número de nuestra enumeración [32.11] que aparece en ambas derivaciones, y sea ella la *n*-ésima fórmula de la enumeración. Entonces $\Gamma_n \vdash_{SP} A$ y $\Gamma_n \vdash_{SP} \sim A$: es decir, Γ_n es d-inconsistente. Pero esto contradice lo establecido anteriormente en (*a*). Luego Γ' debe ser d-consistente.

Comentario. El simple hecho de que toda demostración y toda derivación en los sistemas formales que nos interesan deba tener solamente un número *finito* de fórmulas, quizá sea secundario sólo para la inducción matemática en su uso en metateoría [ya la hemos utilizado en la demostración de 28.4].

(ii) Γ' *es un conjunto d-consistente máximo de SP*

Demostración. Sea A_n cualquier fórmula de P, siendo *n* el número de la posición que ocupa en nuestra enumeración. Supongamos que A no es un elemento de Γ'. Entonces $\Gamma_{n-1} \cup \{A_n\}$ tiene que ser un conjunto d-inconsistente, puesto que si no fuera así A_n se habría añadido a Γ_{n-1} para construir Γ_n. Luego Γ_{n-1}, $A_n \vdash_{SP} B$ y Γ_{n-1}, $A \vdash_{SP} \sim B$ para alguna fórmula B (puesto que Γ_{n-1} es un subconjunto de Γ'). Por lo tanto, o bien A_n está en Γ' o bien se cumple tanto Γ', $A_n \vdash_{SP} B$ como Γ', $A_n \vdash_{SP} \sim B$ para algún B. Esto es, Γ' es un conjunto d-consistente máximo de SP.

Esto completa la demostración del Lema de Lindenbaum, así como la parte preliminar anterior al núcleo (parte principal) de la demostración.

(*e*) *Parte principal de la demostración*

32.13 *Todo conjunto d-consistente de SP tiene un modelo*

Demostración. Sea Γ cualquier conjunto d-consistente de SP. Por el Lema de Lindenbaum existe algún conjunto d-consistente máximo, Γ', del cual Γ es un subconjunto. Si Γ' tiene un modelo, entonces también lo tiene Γ, puesto que toda fórmula de Γ está también en Γ'. Mostramos que Γ' tiene un modelo. Dos pasos: (1) Damos una interpretación I de P. (2) Mostramos que, para una fórmula cualquiera A, si A está en Γ', entonces A es verdadera para la interpretación I. [De hecho demostramos algo más fuerte: demostramos que A es verdadera para I *sii* A está en Γ'. Demostramos esta proposición más fuerte no sólo por el gusto de hacerlo, sino porque necesitamos un 'sii' en la hipótesis de la inducción de la demostración de la proposición más débil. Tenemos que demostrar la proposición fuerte para obtener la débil.]

Paso 1: *Interpretación para P*

Nuestra interpretación I asigna V a todo símbolo proposicional que esté en [es decir, que sea un elemento de] Γ', y F a todos los demás símbolos proposicionales. Las conectivas tienen sus significados habituales.

Paso 2: *A es verdadera para I sii A está en* Γ'

Demostración. Por inducción sobre el número n de conectivas de A.
Base: $n=0$

Entonces A es un símbolo proposicional, y por lo tanto, por nuestra asignación, A es verdadera para I sii A está en Γ'.

Paso de la inducción

Supongamos que el teorema [A es verdadera para I sii A está en Γ'] vale para toda fórmula que tenga menos de m conectivas [hipótesis de la inducción]. Hay que demostrar que vale para toda fórmula que tenga m conectivas.

2 casos:

1. A es $\sim$B, donde B tiene menos de m conectivas.
2. A es B$\supset$C, donde tanto B como C tienen menos de m conectivas.

Queremos demostrar en cada caso (1.ª etapa) si A es verdadera para I, entonces A está en Γ', y (2.ª etapa) si A está en Γ', entonces A es verdadera para I.

Caso 1. *A es* $\sim B$

1.ª etapa: Supongamos que A es verdadera para I. Entonces B es falsa para I. Luego por la hipótesis de la inducción B no está en Γ'. Por lo tanto, por 32.9, $\sim$B está en Γ'; es decir, A está en Γ'.

2.ª etapa: Supongamos que A está en Γ'. Entonces B no está en Γ'. Por lo tanto, por la hipótesis de la inducción, B no es verdadera para I. Por lo tanto, A es verdadera para I.

Caso 2: *A es* $B \supset C$

1.ª etapa: Supongamos que A es verdadera para I. Entonces o bien B no es verdadera para I, o bien C es verdadera para I. Por lo tanto, o bien B no está en Γ', o bien C está en Γ'.

(*i*) Supongamos que B no está en Γ'. Entonces $\sim$B está en Γ'. Entonces, por 31.2 $[\vdash_{SP} \sim B \supset (B \supset C)]$ y MP, $\Gamma' \vdash_{SP} B \supset C$. Luego, por 32.10, $B \supset C$ está en Γ'; es decir, A está en Γ'.

(*ii*) Supongamos ahora que C está en Γ'. Entonces $\Gamma' \vdash_{SP} C$. Entonces, por SP 1 $[\vdash_{SP} C \supset (B \supset C)]$ y MP, $\Gamma' \vdash_{SP} B \supset C$ y, por lo tanto, $B \supset C$ está en Γ'; es decir, A está en Γ'.

2.ª etapa: Supongamos que A no es verdadera para I. Entonces B es verdadera para I y C es falsa para I. De aquí que B esté en Γ' y C no esté en Γ'. Luego $\sim$C está en Γ'. Luego $\Gamma' \vdash_{SP} B$ y $\Gamma' \vdash_{SP} \sim C$. De aquí que, por 31.8 $[\vdash_{SP} B \supset (\sim C \supset \sim (B \supset C))]$ y dos aplicaciones de MP, $\Gamma' \vdash_{SP} \sim (B \supset C)$. Luego $\sim (B \supset C)$ está en Γ'; es decir, $\sim$A está en Γ'. Luego A no está Γ'. Luego: Si A está en Γ', entonces A es verdadera para I.

Y esto completa el Paso de la inducción y la demostración de 32.13.

32.14. *(Teorema de la completud 'fuerte' para SP) Si* $\Gamma \models^{p} A$ *entonces* $\Gamma \vdash_{SP} A$

Demostración. Supongamos que $\Gamma \models_{P} A$. Entonces $\Gamma \cup \{\sim A\}$ no tiene ningún modelo. Por lo tanto, por 32.13, $\Gamma \cup \{\sim A\}$ no es un conjunto d-consistente de SP, y resulta obvio, por lo tanto, que se trata de un conjunto d-inconsistente de SP. Luego por 32.7, $\Gamma \vdash_{SP} A$.

32.15. (*Teorema de la completud semántica de SP*). *Si* $\nvdash_P A$ *entonces* $\vdash_{SP} A$

Demostración. Considérese en 32.14, en vez de Γ, el conjunto vacío. 32.13 y 32.14 (el teorema de completud fuerte) no pueden obtenerse a partir de la demostración de completud tipo Kalmár.

Todavía transparece más la potencia de 32.13 en los Metateoremas 32.16-32.21, que se demuestran todos ellos con su ayuda.

32.16. *Un conjunto de fórmulas de P es un conjunto d-consistente de SP sii tiene un modelo*

Demostración. Directamente a partir de 32.13 y 32.6.

32.17. $\Gamma \nvdash_P A$ *sii* $\Gamma \vdash_{SP} A$

Demostración. Directamente a partir de 32.14 y 28.4 [si $\Gamma \vdash_{SP} A$ entonces $\Gamma \nvdash_{SP} A$].

Este último resultado significa que podemos intercambiar libremente $\nvdash_P$ y $\vdash_{SP}$ en cualquier resultado del que ya dispongamos. Luego:

32.18. (*Teorema de Finitud de P*) $\Gamma \nvdash_P A$ *sii existe un subconjunto finito* Δ *de* Γ *tal que* $\Delta \nvdash_P A$

Demostración. A partir de 23.7 [el análogo para $\vdash_{SP}$ de 32.18] y 32.17.

Este es un resultado bastante sorprendente, teniendo en cuenta que Γ puede ser un conjunto infinito. Resulta trivial en una dirección (si Δ es un subconjunto finito de Γ entonces si $\Delta \nvdash_P A$ entonces $\Gamma \nvdash_P A$]. Lo inesperado es lo que se afirma en la otra dirección [si $\Gamma \nvdash_P A$ entonces existe un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \nvdash_P A$].

32.19. *Si todo subconjunto finito de un conjunto* Γ *de fórmulas de P es un conjunto d-consistente de SP, entonces* Γ *es un conjunto d-consistente de SP*

Demostración. Supongamos que el antecedente es verdadero pero que Γ no es un conjunto d-consistente de SP (y que, por tanto, es d-inconsistente). Entonces para alguna fórmula A, $\Gamma \vdash_{SP} A$ y $\Gamma \vdash_{SP} \sim A$. Luego existe alguna derivación en SP de A a partir de Γ y alguna derivación en SP de $\sim A$ a partir de Γ. Por nuestra definición de *derivación en SP*, cada una de esas derivaciones consta solamente de una cantidad finita de

fórmulas, y por lo tanto sólo aparecen en ellas una cantidad finita de fórmulas de Γ. Luego existe un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash_{SP} A$ y $\Delta \vdash_{SP} \sim A$. Pero esto contradice nuestra hipótesis de que el antecedente era verdadero.

A partir de 32.19 y 32.16 se sigue el resultado conocido como Teorema de Compacidad:

32.20. (*Teorema de Compacidad de P*). *Si todo subconjunto finito de un conjunto* Γ *de fórmulas de P tiene un modelo, entonces* Γ *tiene un modelo*

Demostración. Por 32.16 y 32.19.

Puesto que la conversa de 32.20 es trivialmente verdadera, podríamos escribir 32.20 escribiendo 'sii' en vez de 'si'.

Cuando se aplica 32.17 a 20.6, se obtiene la versión sintáctica del Teorema de Interpolación:

32.21. (*Teorema de Interpolación de SP*). *Si* $\vdash_{SP} A \supset B$, *y A y B tienen al menos un símbolo proposicional en común, entonces existe una fórmula C de P, cuyos símbolos proposicionales, todos ellos, aparecen en A y en B, de forma que* $\vdash_{SP} A \supset C$ *y* $\vdash_{SP} C \supset B$

Demostración. A partir de 20.6 y 32.17.

Dicho brevemente, lo que tenemos es una correspondencia exacta entre la teoría de la demostración de SP y la teoría de modelos de P. El teorema clave para demostrar esta correspondencia es 32.13: *Todo conjunto d-consistente de SP tiene un modelo.*

El Teorema de Compacidad, 32.20, es un resultado muy interesante, y en su versión para la lógica de predicados probablemente tiene aún más aplicaciones que el correspondiente teorema de completud; por ejemplo, lo utilizamos en la secc. 48 para demostrar la existencia de un modelo especial. El enunciado del teorema de 32.20 no hace ninguna referencia a ningún mecanismo deductivo, y puede darse una demostración de él exclusivamente desde el punto de vista de la teoría de modelos. Lo mismo sucede con la versión correspondiente para la lógica de predicados, en la manera en que lo formuló originariamente Gödel (1930, Teorema X); nuestra propia formulación de 45.20 es menos pura en este aspecto. Por su interés, ofrecemos una demostración de la versión proposicional desde un punto de vista de pura teoría de modelos.

Demostración del Teorema de Compacidad de P (32.20) *desde el punto de vista de la teoría de modelos.*

Vamos a definir una *interpretación parcial* de P como una asignación de valores de verdad a, como máximo, un subconjunto propio de los símbolos proposicionales de P. Decimos que una interpretación o interpretación parcial X' de P es una *extensión* de una interpretación o interpretación parcial X de P sii cada asignación que X hace de un valor de verdad a un símbolo proposicional, también la hace X'. Decimos que una interpretación parcial X *hace falsa* un conjunto Δ de fórmulas de P sii no existe ninguna extensión de X que sea un modelo de Δ. En vez de p' escribiremos p_1, en vez de p'' escribiremos p_2, etc.

Supongamos ahora que todo subconjunto finito de un conjunto de fórmulas de P tiene un modelo. Definimos una secuencia de interpretaciones parciales, X_0, X_1, $X_2 \ldots$, de la siguiente forma:

X_0 es una asignación de valores de verdad simplemente al conjunto vacío, es decir, no asigna ningún valor de verdad a ningún símbolo proposicional de P.

X_{i+1} ha de ser X_i más la asignación de verdad a p_{i+1} si la interpretación parcial resultante no hace falso ningún subconjunto finito de Γ; en otro caso, X_{i+1} tiene que ser X_i más la asignación de F a p_{i+1}.

Mostramos por inducción que ninguna de las X_i hace falso ningún subconjunto finito de Γ. Base: X_0 no hace falso ningún subconjunto finito de Γ. Hipótesis de la inducción: X_i no hace falso ningún subconjunto finito de Γ. Hay que demostrar que X_{i+1} *tampoco hace falso a ninguno de tales subconjuntos. Supongamos que* X_{i+1} hace falso a algún subconjunto finito Δ de Γ. Entonces, por construcción, X_{i+1} debe ser X_i más la asignación de F a p_{i+1}, y además X_i más la asignación de V a p_{i+1} debe hacer falso algún subconjunto finito, digamos Σ, de Γ. Luego tenemos:

Ninguna extensión de X_i junto con la asignación de F a p_{i+1} es un modelo de Δ, o en consecuencia tampoco de $\Delta \cup \Sigma$.

Ninguna extensión de X_i junto con la asignación de V a p_{i+1} es un modelo de Σ, o en consecuencia de $\Delta \cup \Sigma$.

Luego ninguna extensión de X_i es un modelo de $\Delta \cup \Sigma$. Pero $\Delta \cup \Sigma$ es un subconjunto finito de Γ. Luego X_i hace falso un subconjunto finito de Γ. Esto contradice la hipótesis de la inducción. Luego nuestro supuesto de

que X_{i+1} hacía falso a algún subconjunto finito de Γ debe ser erróneo, que es lo que queríamos demostrar.

Sea X la interpretación de P que se obtiene considerando todos los X_i juntos. Supongamos que Γ no tiene ningún modelo. Entonces alguna fórmula A que está en Γ es falsa para X. Sea p_k el símbolo proposicional de número más alto (es decir, el que tenga más acentos) que aparezca en A. Entonces X_k hace falso a $\{A\}$, que es un subconjunto finito de Γ. Esto contradice el resultado obtenido en el parágrafo anterior, que establecía que ninguno de los X_i hace falso a ningún subconjunto finito de Γ. Luego Γ tiene un modelo.

Q. E. D.

33. Conceptos de completud sintáctica. Demostración de la completud sintáctica (en un sentido) de SP

Existen varios conceptos de completud sintáctica. El que resulta más natural es el siguiente:

> Un sistema formal S es completo sii para cada fórmula A (del lenguaje del sistema), o bien A, o bien $\sim$A, es un teorema de S[13].

SP no es completo en este sentido. Por ejemplo, p' no es un teorema de SP, y tampoco lo es $\sim p'$ (sólo las tautologías son teoremas de SP, y ni p' ni $\sim p'$ son tautologías). Sería bastante fácil construir un sistema formal que tuviera un lenguaje P y que fuera completo en ese sentido: por ejemplo, el sistema que tiene como axiomas todos los símbolos proposicionales (sin negación), así como todos los axiomas de SP. Pero el lógico sólo quiere obtener como teoremas fórmulas que sean lógicamente válidas, y en el sistema que hemos descrito muchos de los teoremas no serían lógicamente válidos. Desde el punto de vista del lógico, SP resulta perfectamente correcto tal y como es: tiene como teoremas todas las fórmulas lógicamente válidas de P, y sólo las fórmulas lógicamente válidas de P, y resulta adecuado para expresar cualquier función de verdad.

Sin embargo, existe un sentido de 'sintácticamente completo' en el que SP resulta sintácticamente completo:

Definición. SP es *sintácticamente completo* (en un sentido) sii no se le puede añadir como esquema de axioma ningún esquema que no sea susceptible de demostración sin que pierda la consistencia.

En lo que sigue tomamos como obvias las nociones de *esquema*,

esquema susceptible de demostración, añadir como un esquema de axioma, esquema tautológico, etc.

33.1 *SP es sintácticamente completo*

Demostración. Sea U cualquier esquema susceptible de demostración en SP, que tiene un número cualquiera k de distintas letras esquemáticas $U_1 \ldots, U_k$. Entonces, por el teorema de completud semántica, U no puede ser un esquema tautológico (si lo fuera, sería susceptible de demostración). Luego existe alguna asignación (a la que llamaremos 'W') de valores de verdad a las letras esquemáticas de U para la cual U adopta como un todo, según la evaluación mediante la tabla de verdad habitual, el valor F. Añadamos U a SP como un esquema de axioma, y sea SP* esta ampliación de SP. Entonces toda substitución de las letras esquemáticas $U_1 \ldots, U_k$ por las fórmulas $A_1 \ldots, A_k$ (no necesariamente distintas) será un axioma, y por lo tanto un teorema, de SP*. Sea B la fórmula que resulta de substituir cada U_i de U por $p' \supset p'$ o por $\sim(p' \supset p')$, según que la asignación W asigne a U_i una V o una F. Entonces B es un teorema de SP*. Pero B es falso para toda interpretación. Por lo tanto, $\sim$B es verdadero para toda interpretación; es decir, $\sim$B es lógicamente válido. Luego por la completud semántica de SP, $\sim$B es un teorema de SP y por lo tanto también de SP*. Luego tanto B como $\sim$B son teoremas de SP*; es decir, SP* no es consistente. Pero U era *cualquier* esquema no susceptible de demostración en SP. Luego SP es sintácticamente completo.

Aunque no se pueda añadir a SP como esquema de axioma ningún *esquema* que no sea susceptible de demostración, sin merma de la consistencia, pueden añadirse como axiomas algunas *fórmulas* no susceptibles de demostración, conservando la consistencia:

33.2. *Si $\sim A$ es cualquier fórmula de P que no sea un teorema de SP, entonces A puede añadirse como axioma a SP conservando la consistencia*

Demostración. Sea $\sim$A cualquier fórmula de P que no es un teorema de SP. Supongamos que la adición de A como axioma a SP da lugar a un sistema que no es consistente. Entonces, para alguna fórmula B se cumple $A \vdash_{SP} B$ y $A \vdash_{SP} B$. Luego, por el Teorema de Deducción, $\vdash_{SP} A \supset B$ y $\vdash_{SP} A \supset \sim B$, para algún B. Pero, por 32.4, $\vdash_{SP} (A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$. Luego, por dos aplicaciones de MP, $\vdash_{SP} \sim A$. Pero esto contradice nuestro supuesto de que $\sim$A no era un teorema de SP. Luego: Si $\sim$A es

cualquier fórmula de P que no sea un teorema de SP, podemos añadir A como axioma a SP conservando la consistencia.

Indicaciones

1. Un sistema formal de lógica proposicional veritativo-funcional en el que no coincidan la consistencia simple y la consistencia absoluta puede ser semántica y sintácticamente completo, y además quizás sea posible añadirle un esquema que no sea susceptible de demostración sin que se llegue a una inconsistencia *absoluta*. Esto es lo que sucede con el siguiente sistema, debido a Henry Hiż (1957):

Sistema de Hiz

Símbolos y fórmulas: Como en SP, teniendo como únicas conectivas a $\sim$ y $\supset$.

Esquemas de axiomas:

1. $\sim(A \supset B) \supset A$
2. $\sim(A \supset B) \supset \sim B$

Reglas de inferencia:

[Adviértase la exigencia de que las premisas deben ser teoremas]

1. Si $A \supset B$ y $B \supset C$ son teoremas, entonces también lo es $A \supset C$.
2. Si $A \supset (B \supset C)$ y $A \supset B$ son teoremas, entonces también lo es $A \supset C$.
3. Si $\sim A \supset B$ y $\sim A \supset \sim B$ son teoremas, entonces A también lo es.

Todas las tautologías de P son teoremas de este sistema, de forma que es sintácticamente completo (cfr. la demostración de 33.1), pero resulta posible añadir al sistema el esquema no susceptible de demostración $\sim A$ sin que se llegue a una inconsistencia absoluta: es decir, ningún símbolo proposicional sin negación es un teorema del sistema ampliado.

2. Si un sistema tiene como una de sus reglas de inferencia una regla de substitución (clásica), entonces, añadirle como axioma una fórmula que no sea un teorema equivale a añadirle un *esquema* que previamente no es susceptible de demostración, puesto que la regla de substitución permitirá substituir los símbolos proposicionales de la fórmula añadida por fórmulas cualesquiera. Luego si un sistema de ese tipo es sintácticamente completo, no se le podrá añadir *ninguna fórmula* conservando la consistencia (es decir, no vale para él ninguna versión de 33.2). En este aspecto, existe una diferencia fundamental entre sistemas sintácticamente completos *que cuentan con* la regla de substitución como regla de inferencia, y sistemas (como SP) *que no disponen de* ella.

34. Demostración de la decidibilidad de SP. Sistema decidible y fórmula decidible. Definición de *procedimiento efectivo de demostración*

Definición. Un sistema S es *decidible* sii existe un método efectivo que permita establecer, para cada fórmula de S, si es o no un teorema de S.

34.1. *SP es decidible*

Demostración. Por 28.3, todo teorema de SP es una tautología de P, y por el teorema de completud semántica para SP toda tautología de P es un teorema de SP. Luego una fórmula de P es un teorema de SP sii es una tautología de P. Consideramos obvio que el método completo de tablas de verdad es un método efectivo que permite establecer, para cualquier fórmula de P, si es o no una tautología de P. Luego SP es decidible.

Nota. Aunque SP y otros sistemas formales de la lógica proposicional veritativo-funcional clásica no restringida son decidibles, se ha demostrado que algunos 'fragmentos' de la lógica veritativo-funcional clásica no son decidibles. Puede consultarse, para detalles y referencias adicionales sobre lo anterior y sobre otras peculiaridades de la metateoría de la lógica proposicional veritativo-funcional clásica, el interesante artículo de Harrop (1964).

Aunque el *sistema* SP es decidible, existen *fórmulas* de SP que no son decidibles en SP, en un sentido de decidible que es diferente y que explicamos a continuación:

Definición. Una *fórmula* A *es decidible en un sistema* S sii o bien A o bien su negación es un teorema de S.

Ejemplos: La fórmula $\sim(p' \supset p')$ es decidible en SP; la fórmula $\sim p'$ no lo es.

Luego un *sistema decidible* puede tener *fórmulas que no sean decidibles* (SP es uno de esos sistemas). Y a la inversa, *toda fórmula* de un *sistema que no sea decidible* puede ser *decidible*. Ejemplo: Sea S un sistema consistente que no es decidible, con negación, y cuyas fórmulas son efectivamente enumerables. Utilizando el Lema de Lindenbaum y su demostración podemos definir un sistema S′ que se obtiene añadiendo sucesivamente como axiomas a S cada una de las fórmulas de S que pueda añadirse conservando la consistencia, a medida que vaya apareciendo su número (por decirlo así), de forma que el conjunto de los teoremas de S′ sea un conjunto d-consistente máximo de S. Entonces,

para cada fórmula A de S, o bien A o bien su negación será un teorema de S'. Pero en la forma de definición o construcción de S' no hay nada que garantice que existe un *método efectivo* para establecer, para cada fórmula A, *cuál* de las dos fórmulas, A y la negación de A, es un teorema de S'.

Definición. Un sistema S tiene un *procedimiento efectivo de demostración* sii, dado un teorema cualquiera T de S, existe un método efectivo para construir una demostración de T en S.

Un sistema decidible no necesita tener un procedimiento efectivo de demostración. De hecho, SP tiene un procedimiento efectivo de demostración. Puede hacerse que la demostración de completud tipo Kalmár proporcione uno, pero es bastante chapucero. En la secc. 37 daremos un ejemplo de un procedimiento efectivo de demostración mucho más simple para un sistema diferente de lógica proposicional veritativo-funcional.

35. Sentido ampliado de 'interpretación de P'. Modelos finitos débiles y modelos finitos fuertes

En esta sección vamos a ampliar la noción de 'interpretación de P':

1. Admitimos como interpretaciones de P asignaciones de valores a los símbolos proposicionales de P que no sean valores de verdad.

2. Admitimos que $\sim$ y $\supset$ se definan mediante tablas que no son tablas de verdad, aunque de hecho guardan un gran parecido con las tablas de verdad.

3. Donde antes hablábamos de 'todas las interpretaciones' queriendo decir 'todas las interpretaciones que asignan valores que proceden exclusivamente del conjunto {V, F} y que dan a $\sim$ y $\supset$ sus sentidos habituales', hablaremos ahora de 'todas las interpretaciones que asignan valores de tal o cual conjunto, y con tales o cuales sentidos de $\sim$ y $\supset$', donde el conjunto y los sentidos serán diferentes.

4. Hemos definido 'lógicamente válido' como si significara verdadero para todas las interpretaciones', donde esto significaba 'verdadero para todas las interpretaciones que asignan valores de verdad exclusivamente del conjunto {V, F} y que dan a $\sim$ y $\supset$ sus sentidos habituales'. Seguiremos manteniendo este significado (es decir, lo mismo que la frase larga). Pero también usaremos de otra forma la palabra 'válido'. La usaremos para significar 'verdadero para todas las interpretaciones que

pertenecen a la clase que estamos considerando', donde lo que determina principalmente de qué clase se trata será (1) el conjunto específico de valores que las interpretaciones de la clase pueden adoptar para sus asignaciones a los símbolos proposicionales, y (2) los sentidos específicos dados a $\sim$ y $\supset$ (invariables para una clase dada de interpretaciones).

Luego: presentaremos una *clase* M de interpretaciones de P especificando o exhibiendo:

1. Un conjunto no vacío W de las cosas llamadas *valores*, que son los valores que pueden asignarse a los símbolos proposicionales de P:

2. Un subconjunto D de V, el conjunto de los *valores designados.*

3. (i) una tabla T1 que muestra, para una fórmula cualquiera A de P, qué valor (de W) tiene $\sim$A para cada valor que pueda asignarse a A de entre los del conjunto W.

(ii) Una tabla T2 que muestra qué valor tiene A $\supset$ B para cada uno de los posibles pares de valores de W que A y B pueden tener (siendo A y B fórmulas cualesquiera de P).

1. W era el conjunto {V, F}, es decir, el conjunto de los valores de *verdad.*

2. D era el conjunto {W}, es decir, el conjunto cuyo único elemento es el valor veritativo verdad.

3. (i) La tabla T1 era la tabla de verdad habitual para $\sim$.

(ii) La tabla T2 era la tabla de verdad habitual para $\supset$.

Tomemos como dada una clase M de interpretaciones de P, para la cual se han especificado los conjuntos y las tablas W, D, T1 y T2. Definimos a continuación una *interpretación* I como una asignación a cada uno de los símbolos proposicionales de P de uno de los valores del conjunto W. Una fórmula A es *verdadera para I* sii toma un valor designado (es decir, un valor del conjunto D) para la asignación de valores que lleva a cabo I para sus símbolos proposicionales constituyentes (viniendo determinado el valor de A por esta asignación y las tablas T1 y T2). Una fórmula A es *válida para la clase M* sii es *verdadera para todas las interpretaciones de la clase M.*

Utilizaremos estas nociones en las demostraciones de independencia de la siguiente sección.

Las nociones siguientes [debidas a Ronald Harrop: cfr. Harrop, 1964] encuentran también aquí su lugar. No haremos ningún uso de ellas. Pero van a salirnos al paso en la literatura lógica, y resultarían

útiles en un tratamiento más extenso que el nuestro. Definimos tales nociones sólo para el lenguaje P; pero podrían ser definidas para lenguajes cualesquiera.

Se dice que una interpretación I que pertenece a una clase M (para la que se han especificado W, D, T1 y T2) es un *modelo finito débil* de un sistema formal cualquiera S, que tiene un lenguaje P, si satisface las siguientes condiciones 1, 2 y 3*a*; y es un *modelo finito fuerte* si satisface las siguientes condiciones 1, 2 y 3*b*:

1. El conjunto W es finito.
2. Todo axioma de S es válido para la clase M, es decir, es verdadero para todas las interpretaciones de la clase M.

3*a*. Cada regla de inferencia de S preserva la validez para la clase M.

3*b*. Cada regla de inferencia de S preserva la verdad para una interpretación dada.

Como ilustración: Toda interpretación de P que pertenece a la clase de las interpretaciones que estábamos considerando en las secciones anteriores es tanto un modelo finito fuerte como un modelo finito débil del sistema SP. Puesto que (1) el conjunto {V, F} es finito; (2) los axiomas de SP son verdaderos para todas las interpretaciones de esa clase; (3*a*) el Modus Ponens para $\supset$ preserva la característica de verdad para todas las interpretaciones de esa clase [28.2]; y (3*b*) el Modus Ponens preserva la característica de verdad para I [28.5].

36. Demostración de la independencia de los tres esquemas de axioma de SP

Sea S cualquier sistema formal, y sea A uno de sus axiomas. Sea S $-$A el sistema obtenido a partir de S al quitar A de entre sus axiomas. Entonces A es *independiente* de los restantes axiomas de S sii no existe ninguna demostración de A en S $-$ A. [Es decir, sii A no es un teorema de S $-$ A]. Lo mismo sucede, con las modificaciones adecuadas, con los esquemas de axioma.

Resulta fácil ver cómo se puede establecer en principio que un axioma no es independiente de los axiomas restantes del sistema (por supuesto, demostrándolo a partir de los otros). Pero quizás no es tan trivial la forma de establecer en principio la independencia. De hecho, los dos tipos de métodos utilizados para demostrar la consistencia pueden utilizarse también para demostrar la independencia:

(*a*) Desde el punto de vista de la teoría de modelos. Sea A el axioma cuya independencia queremos demostrar. Si podemos mostrar que existe una interpretación para la cual todos los demás axiomas resultan verdaderos, y para la cual la(s) regla(s) de inferencia preserva(n) la verdad, pero para la cual A no resulta verdadero, entonces esto demuestra que A no es derivable a partir de los restantes axiomas, es decir, que A es independiente de los restantes axiomas.

(*b*) Desde el punto de vista de la teoría de la demostración. Sea nuevo A el axioma en el que estamos interesados. Si podemos mostrar que todos los demás axiomas tienen una cierta propiedad, entonces A es independiente de los demás axiomas.

Si nos limitamos al primer sentido, más estricto de 'interpretación', no podríamos utilizar el método (*a*) para demostrar la independencia de los axiomas de SP, puesto que en este primitivo sentido estricto de '*interpretación*' todo axioma de SP es verdadero para toda interpretación. Pero veremos que en el nuevo sentido ampliado de 'interpretación' es posible encontrar interpretaciones para las cuales alguno de los axiomas no resulta verdadero.

En lo que sigue hablaremos libremente de que los esquemas son 'válidos' o 'no válidos', lo que constituye una forma abreviada de decir que todas las fórmulas que tienen la forma del esquema son válidas, o respectivamente, que no todas las fórmulas que tienen esa forma son válidas. Y lo mismo hay que entender en el caso de 'susceptible de demostración'.

36.1 *El esquema de axioma SP 1 es independiente del conjunto de los esquemas de axioma* {*SP* 2, *SP* 3}

Demostración. Sea M la clase de las interpretaciones de P que tiene $W = \{0, 1, 2\}$, $D\{0\}$ y T1 y T2 de la siguiente forma:

T1		T2		
A	$\sim$A	A	B	A$\supset$B
0	1	0	0	0
1	1	0	1	2
2	0	0	2	2
		1	0	2
		1	1	2
		1	2	0
		2	0	0
		2	1	0
		2	2	0

Las tablas que siguen muestran que los esquemas de axioma SP 2 y SP3 son válidos para todas las interpretaciones de la clase M. El Modus Ponens preserva la validez para la clase M. Por lo tanto, todo lo que sea susceptible de demostración utilizando sólo fórmulas que sean axiomas por SP 2 y SP 3 es válido para la clase M. Pero el esquema SP 1 no es válido para la clase M. Por lo tanto no es susceptible de demostración a partir del conjunto $\{SP_2, SP_3\}$. (Cada tabla necesita 3^n filas, donde n es el número de letras esquemáticas distintas del esquema axiomático.)

SP 1

A ⊃ (B ⊃ A)
0 0 0 0 0
0 2 1 2 0
0 0 2 0 0
1 0 0 2 1
1 0 1 2 1
1 2 2 0 1
2 0 0 2 2
2 0 1 0 2
2 0 2 0 2
*

SP 2

(A ⊃ (B ⊃ C))	⊃	((A ⊃ B) ⊃ (A ⊃ C))
0 0 0 0 0	0	0 0 0 0 0 0 0 0
0 2 0 2 1	0	0 0 0 2 0 2 1
0 2 0 2 2	0	0 0 0 2 0 2 2
0 2 1 2 0	0	0 2 1 0 0 0 0
0 2 1 2 1	0	0 2 1 0 0 2 1
0 0 1 0 2	0	0 2 1 0 0 2 2
0 0 2 0 0	0	0 2 2 0 0 0 0
0 0 2 0 1	0	0 2 2 0 0 2 1
0 0 2 0 2	0	0 2 2 0 0 2 2
1 2 0 0 0	0	1 2 0 0 1 2 0
1 0 0 2 1	0	1 2 0 0 1 2 1
1 0 0 2 2	0	1 2 0 0 1 0 2
1 0 1 2 0	0	1 2 1 0 1 2 0
1 0 1 2 1	0	1 2 1 0 1 2 1
1 2 1 0 2	0	1 2 1 0 1 0 2
1 2 2 0 0	0	1 0 2 2 1 2 0
1 2 2 0 1	0	1 0 2 2 1 2 1
1 2 2 0 2	0	1 0 2 0 1 0 2
2 0 0 0 0	0	2 0 0 0 2 0 0
2 0 0 2 1	0	2 0 0 0 2 0 1
2 0 0 2 2	0	2 0 0 0 2 0 2
2 0 1 2 0	0	2 0 1 0 2 0 0
2 0 1 2 1	0	2 0 1 0 2 0 1
2 0 1 0 2	0	2 0 1 0 2 0 2
2 0 2 0 0	0	2 0 2 0 2 0 0
2 0 2 0 1	0	2 0 2 0 2 0 1
2 0 2 0 2	0	2 0 2 0 2 0 2
		*

SP 3

(∼A ⊃ ∼B) ⊃ (B ⊃ A)
1 0 2 1 0 0 0 0 0
1 0 2 1 1 0 1 2 0
1 0 2 0 2 0 2 0 0
1 1 2 1 0 0 0 2 1
1 1 2 1 1 0 1 2 1
1 1 2 0 2 0 2 0 1
0 2 2 1 0 0 0 2 2
0 2 2 1 1 0 1 0 2
0 2 0 0 2 0 2 0 2
*

36.2 *El esquema SP 2 es independiente del conjunto {SP 1, SP 3}*

Demostración. Sea M la clase de las interpretaciones de P que tiene $W=\{0, 1, 2\}$, $D=\{1\}$, y T1 y T2 de la forma siguiente:

T1		T2		
A	$\sim A$	A	B	$A \supset B$
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
2	2	0	2	1
		1	0	0
		1	1	1
		1	2	2
		2	0	2
		2	0	2
		2	1	1
		2	2	1

SP 1 y SP 2 son válidos para la clase M. MP preserva la validez para la clase M. SP 2 no es válido para la clase M (toma el valor 2 cuando A es 2, B es 2 y C es 0).

36.3 *SP 3 es independiente del conjunto {SP 1, SP 2}*

Demostración. Para cambiar, vamos a utilizar otro método de demostración. Sea L* el esquema que resulta borrando en un esquema L todos los signos de negación. Así, Si L es $(\sim A \supset \sim B)$ entonces L* es $(A \supset B)$. Llamemos L* al esquema asociado de L. Entonces (1) los esquemas asociados de SP 1 y SP 2 son esquemas tautológicos [en ambos casos $L^* = L$]; (2) El Modus Ponens preserva la tautologicidad de los esquemas asociados [repárese en que $(A \supset B)^*$ es $(A \supset B^*)$]; (3) es esquema asociado de SP 3 no es un esquema tautológico [es $(A \supset B) \supset (B \supset A)$]. Luego SP 3 es independiente de {SP 1, SP 2}.

37. Formalización de Anderson y Belnap de la lógica proposicional veritativo-funcional: el sistema AB

El Modus Ponens para $\supset$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{A,\ A \supset B}{B}$$

$A \supset B \equiv \sim A \vee B$. Luego el Modus Ponens para $\vee$ es:

$$\frac{A,\ \sim A \vee B}{B}$$

Alan Ross Anderson y Nuel Belnap admiten el Modus Ponens para $\vee$ (y lo mismo sucede también con el Modus Ponens para $\supset$) por la razón siguiente: ellos sostienen que:

(*a*) las reglas de inferencia de un sistema formal cuyos teoremas (bajo su interpretación habitual) son verdades de la lógica deben, bajo su interpretación habitual, ser reglas válidas de inferencia;

(*b*) bajo su interpretación habitual, el Modus Ponens para V (o para $\supset$) implica (en conjunción con principios aceptados) que a partir de una contradicción formal cualquiera se sigue lógicamente la proposición que se quiera; y

(*c*) no es precisamente verdadero que de una contradicción formal cualquiera se siga lógicamente la proposición que se quiera.

Como ilustración de (*b*):

1	*A*	[Supuesto]	La contradicción formal
2	$\sim A$	[Supuesto]	
3	$\sim A \vee B$	[A partir de 2 mediante los principios aceptados de la lógica veritativo-funcional: B puede ser una fórmula cualquiera]	
4	B	[1, 3, MP para $\vee$]	

Según esto, Anderson y Belnap presentaron en 1959 un sistema formal de lógica proposicional veritativo-funcional que no empleaba el Modus Ponens para V (ni ningún equivalente suyo). Este sistema, que es una simplificación de sistemas anteriores de Kurt Schütte, admite una demostración de completud muy fácil y tiene un sencillo procedimiento efectivo de demostración.

[*Comentarios filosóficos.* Estoy de acuerdo con Anderson y Belnap en cuanto a (*c*). Pero no creo que, *para lo que ahora nos proponemos*, tengamos que estar de acuerdo con (*a*). Considero la regla de inferencia de SP no como algo que bajo la interpretación habitual, tenga que ser una regla válida de inferencia, sino simplemente como una *regla para generar fórmulas* que, bajo la interpretación habitual, expresan verdades de la lógica. Para lo que ahora nos proponemos no importa *cómo* se han generado esas fórmulas, dado que todas ellas son generadas (y que no

hay ninguna otra cosa). Luego para nosotros o bien el Modus Ponens no tiene ninguna interpretación propuesta, o bien tiene que ser interpretado como una regla para generar fórmulas a partir de otras fórmulas, una regla que, dada la interpretación de las fórmulas, se pone a generar solamente verdades de la lógica cuando se le aplica solamente a verdades de la lógica. Según esto, niego (*b*). Sin embargo, estoy de acuerdo con la pretensión implícita de Anderson y Belnap de que una de las tareas del lógico es construir sistemas formales cuyas reglas de inferencia puedan interpretarse como si expresaran reglas válidas de inferencia.]

El sistema AB

Símbolos

AB tiene sólo 4 símbolos: p $'$ $\overline{}$ $\vee$

El símbolo p seguido de uno o más acentos es un *símbolo proposicional* de AB.

La barra, $\overline{}$, expresa, bajo la interpretación propuesta, la negación. Su uso nos permite prescindir de paréntesis.

Fbfs

1. Cualquier símbolo proposicional es una fbf.
2. Si A es una fbf, entonces $\overline{A}$ es una fbf.
3. Si A y B son fbfs, entonces $A \vee B$ es una fbf.
4. Ninguna otra cosa es una fbf.

Definición de disyunción primitiva

Una fbf A es una *disyunción primitiva* sii tiene la forma $B_1 \vee \ldots \vee B_n$ $(n \geqslant 1)$, en donde cada B_i es o bien un símbolo proposicional, o bien un símbolo proposicional que tiene encima la barra ($\overline{}$).

Definición de parte disyuntiva

(*a*) Toda fbf es una parte disyuntiva de sí misma.
(*b*) Si $B \vee C$ es una parte disyuntiva de A, entonces B es una parte disyuntiva de A, y también lo es C.

Notación. D(A) es una fbf de la cual A es una parte disyuntiva, y D(B) es el resultado de reemplazar una aparición de la parte disyuntiva A por B en D(A).

Axiomas

Una fbf A es un axioma sii es una disyunción primitiva y, para algún símbolo proposicional B, tanto B como $\overline{\overline{B}}$ son pares disyuntivas suyas.

Ejemplos: $p' \vee p'' \vee \overline{p'''} \vee \overline{p'}$ es un axioma; $p' \vee \overline{p'} \vee \overline{p'' \vee p'''}$ no lo es (porque no es una disyunción primitiva).

Reglas de inferencia

I. $D(\overline{\overline{A}})$ es una consecuencia inmediata de D(A).

II. $D(\overline{A \vee B})$ es una consecuencia inmediata de $D(\overline{A})$ y $D(\overline{B})$. Para mayor legibilidad, en vez de p', p'', p''' escribiremos p, q, r.

Ejemplos:

I. $p \vee \overline{\overline{q \vee r}}$ es una consecuencia de $p \vee \overline{q \vee r}$.

II. $p \vee \overline{q \vee r}$ es una consecuencia inmediata de $p \vee \overline{q}$ y $p \vee \overline{r}$.

Definición de demostración en AB:

Una *demostración en AB* es una cadena finita de fórmulas de AB cada una de las cuales es o bien un axioma de AB, o bien una consecuencia inmediata por la Regla I o la Regla II de alguna fórmula (o fórmulas) que le preceda(n) en la cadena.

Ejemplo:

1	$\overline{p} \vee \overline{r} \vee \overline{p} \vee q$	[Axioma]
2	$p \vee \overline{r} \vee p \vee q$	[A partir de 1 por la Regla I]
3	$\overline{q} \vee \overline{r} \vee \overline{p} \vee q$	[Axioma]
4	$p \vee q \vee r \vee p \vee q$	[A partir de 2 y 3 por la Regla II]

Uno de los rasgos atractivos de este sistema es que dispone de un sencillo procedimiento efectivo de demostración. Como ejemplo: Si se nos pide que construyamos una demostración de $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \vee \overline{q} \vee p$ [que es una transcripción de $(\sim p \supset \sim p) \supset (q \supset p)$ en términos de $\overline{}$ y $\vee$].

1. Buscamos la parte reducida que esté más a la izquierda de la fórmula que hay que demostrar [una parte 'reducida' es una parte dis-

yuntiva que es o bien un símbolo proposicional o bien un símbolo proposicional negado]. En este caso, es

$$\overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$$

La única regla que nos puede proporcionar algo que tenga esta forma es la Regla II, que dice que

$$\overline{\bar{p} \vee \bar{q}} \vee \bar{q} \vee p$$

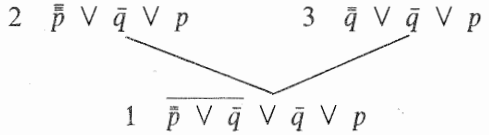
se puede obtener a partir de las dos fórmulas

$$\bar{\bar{p}} \vee \bar{q} \vee p$$

y

$$\bar{q} \vee \bar{q} \vee p$$

2. Comencemos la construcción de un árbol, que tenga en su vértice la fórmula que hay que demostrar, y en las dos puntas de la primera bifurcación las dos fórmulas que acabamos de mencionar:



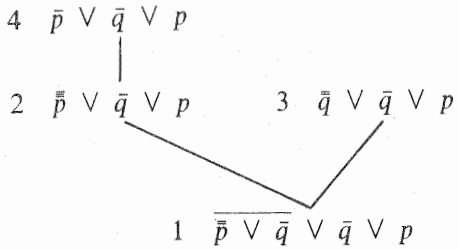
3. Busquemos la parte no reducida que esté más a la izquierda en la fórmula $\bar{\bar{p}} \vee \bar{q} \vee p$ [2]. La única regla que nos puede proporcionar algo que tenga esa forma es la Regla I, que dice que

$$\bar{\bar{p}} \vee \bar{q} \vee p$$

se puede obtener a partir de

$$p \vee \bar{q} \vee p$$

4. Escribamos $p \vee \bar{q} \vee p$ en el árbol, por encima de $\bar{\bar{p}} \vee \bar{q} \vee p$. Nuestro árbol presentará ahora el siguiente aspecto:



5. $\bar{p} \vee \bar{q} \vee p$ [4] está completamente reducida y de hecho es un axioma. Consideremos la otra rama. La parte no reducida que está más a la izquierda es

$$\bar{\bar{q}}$$

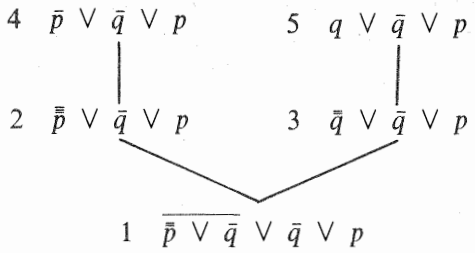
que se puede obtener solamente mediante la Regla I, que dice que

$$\bar{\bar{q}} \vee \bar{q} \vee p$$

se puede obtener a partir de

$$q \vee \bar{q} \vee p$$

6. Escribamos $q \vee \bar{q} \vee p$ encima de $\bar{\bar{q}} \vee \bar{q} \vee p$ [3]. Nuestro árbol quedará ahora:



7. Las dos ramas del árbol acaban en fórmulas completamente reducidas que de hecho son axiomas. Para obtener la demostración que se nos pedía sólo tenemos que escribir las fórmulas del árbol siguiendo el orden inverso, de la siguiente forma:

[5]	$q \vee \bar{q} \vee p$	[Axioma]
[4]	$\bar{p} \vee \bar{q} \vee p$	[Axioma]
[3]	$\bar{\bar{q}} \vee \bar{q} \vee p$	[A partir de 5, por la Regla I]
[2]	$\bar{\bar{p}} \vee \bar{q} \vee p$	[A partir de 4 por la Regla I]
[1]	$\bar{\bar{p}} \vee \bar{q} \vee \bar{q} \vee p$	[A partir de 2 y 3 por la Regla II]

Resulta evidente intuitivamente que el método que hemos estado utilizando es un método efectivo que permite construir, para cualquier fórmula dada, un árbol que tenga un número finito de ramas, cada una de las cuales acaba en una disyunción primitiva (considerando que una fórmula única es un árbol con cero ramas), puesto que es imposible que una fórmula de AB no sea ni una disyunción primitiva ni algo no reducible por nuestro método (si no es una disyunción primitiva, entonces podemos reducirla al menos en un paso más). Dejamos al lector demos-

trar la precedente afirmación de forma rigurosa mediante una inducción matemática.

También resulta obvio que si cualquier rama de un árbol de este tipo acaba en un axioma, la fórmula correspondiente es un teorema de AB. La conversa de este enunciado es una consecuencia de la demostración de la completud semántica de AB, que sigue a la demostración de consistencia.

Semántica de AB

Igual que P, con modificaciones obvias. Por ej., la cláusula 3 de la definición de *verdadero para una interpretación de P* se sustituye por:

3. A $\vee$ B es verdadera para I sii A es verdadera para I o B es verdadera para I ['. . ., o . . ., ' veritativo-funcional].

Demostración de la consistencia de AB

37.1. *Lema: Las reglas de inferencia de AB preservan la tautologicidad*

Demostración

(*a*) Regla I. Demostrar que si D(A) es una tautología, entonces también lo es $D(\bar{A})$.

Casos: 1. D(A) es A
2. D(A) es A $\vee$ B
3. D(A) es B $\vee$ A
4. D(A) es B $\vee$ A $\vee$ C

Caso 1. De la definición de verdad para AB se sigue que si $\vdash_{AB} A$ entonces $\vdash_{AB} \bar{A}$.

Caso 2. Si $\vdash_{AB}$ A $\vee$ B entonces $\vdash_{AB} \bar{A} \vee$ B.

Casos 3 y 4. Igual que el Caso 2.

(*b*) Regla II. Demostrar que si $\vdash_{AB} D(\bar{A})$ y $\vdash_{AB} D(\bar{B})$ entonces $\vdash_{AB} D(\overline{A \vee B})$.

Casos: 1. $D(\bar{A})$ es $\bar{A}$ [luego $D(\bar{B})$ es $\bar{B}$ y $D(\overline{A \vee B})$ es $\overline{A \vee B}$].

2. $D(\bar{A})$ es $\bar{A} \vee C$ [luego $D(\bar{B})$ es $\bar{B} \vee C$ y $D(\overline{A \vee B})$ es $\overline{A \vee B \vee C}$].

3. $D(\bar{A})$ es $C \vee \bar{A}$.

4. D(A) es $C \vee \bar{A} \vee D$.

Caso 1. De la definición de verdad para AB se sigue que si $\vdash_{AB}\overline{A}$ y $\vdash_{AB}\overline{B}$, entonces $\vdash_{AB}\overline{B}$, entonces $\vdash_{AB}\overline{A \vee B}$.

Caso 2. A partir de la equivalencia

$$((\overline{A} \vee C) \wedge (\overline{B} \vee C)) \equiv (\overline{A \vee B} \vee C)$$

resulta claro que si $\vdash_{AB}\overline{A} \vee C$ y $\vdash_{AB}\overline{B} \vee C$, entonces $\vdash_{AB}\overline{A \vee B} \vee C$.

Casos 3 y 4. Igual que el Caso 2.

37.2 *AB es consistente*

Demostración. Todo axioma de AB es una tautología, y por 37.1, las reglas de inferencia preservan la tautologicidad. Luego todo teorema de AB es una tautología. Luego AB es consistente.

Demostración de la completud semántica de AB

37.3 *Lema: Cualquier fórmula que sea una consecuencia inmediata de una fórmula que es falsa para una interpretación dada también es falsa para esa interpretación*

[Esto significa, en el caso de la regla II, que si $D(\overline{A})$ es falsa *o* $D(\overline{B})$ es falsa para la interpretación (o lo son ambas), entonces $D(\overline{A \vee B})$ también es falsa para la interpretación].

Demostración

(*a*) Regla I. Demostrar que si D(A) es falsa para I entonces también lo es $D(\overline{\overline{A}})$.

Los Casos 1-4 son igual que en la demostración de (*a*) en 37.1. Las demostraciones de todos estos casos son triviales.

(*b*) Regla II.

Caso 1. $D(\overline{A})$ es $\overline{A}$. Luego $D(\overline{B})$ es $\overline{B}$ y $D(\overline{A \vee B})$ es $\overline{A \vee B}$. Si $\overline{A}$ es falsa para I, entonces $A \vee B$ es falsa para I, sin tener en cuenta si $\overline{B}$ es verdadera o falsa para I. Y lo mismo sucede con $\overline{B}$.

Caso 2. $D(\overline{A})$ es $\overline{A} \vee C$. Luego $D(\overline{B})$ es $\overline{B} \vee C$, y $D(\overline{A \vee B})$ es $\overline{A \vee B} \vee C$. Si $\overline{A} \vee C$ es falsa para I, entonces A debe ser verdadera

para I y C debe ser falsa para I, y por lo tanto $\overline{A \vee B \vee C}$ debe ser falsa para I. Lo mismo sucede con $\overline{B} \vee C$.

Casos 3 y 4. Igual que 2.

37.4 *AB es semánticamente completo* [*respecto a las tautologías en* $\overline{\ }$ *y* $\supset$]

Demostración. Supongamos que A es una fórmula de AB que no es un teorema de AB. Construyamos un árbol para A en la forma indicada al comienzo de esta sección. Al menos una rama del árbol debe acabar en una disyunción primitiva que no sea un axioma [si todas las ramas acabaran en un axioma, entonces A sería un teorema]. Digamos de cada una de tales ramas que es una rama 'mala'. Para una rama mala dada, la siguiente interpretación de AB hace que toda fórmula de rama sea falsa para I:

> Sean $B_1, \ldots, ,B_k$ los distintos símbolos proposicionales que aparecen (todos ellos) en la fórmula que encabeza la rama mala. Para cada $B_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ si B_i aparece allí sin negar, I le asigna F; si aparece negada, V [para ningún B_i sucede que tanto B_i como B_i aparezcan allí; si así fuera, la fórmula sería un axioma]. I asigna V a todos los demás símbolos proposicionales de AB [de la misma forma podría asignarles F, o cualquier otra combinación de valores de verdad].

Bajo esta interpretación, la fórmula que encabeza la rama mala, incluyendo a A, que está en el vértice, es falsa para I. Luego A no es una tautología. Luego tenemos: Si A es una fórmula de AB que no es un teorema de AB, entonces A no es una tautología. O, lo que es equivalente: Si A es una tautología de AB, entonces A es un teorema de AB.

37.5 *AB es decidible*

Dos demostraciones:

1. Puesto que una fórmula de AB es un teorema de AB sii es una tautología, el método habitual de tablas de verdad es un método efectivo de decisión para AB.

2. Sea A cualquier fórmula de AB de la que queremos saber si es un teorema o no. Construimos un árbol (completo) para A en la forma indicada anteriormente. Si todas las ramas del árbol acaban en un axioma, A es un teorema de AB. Si al menos una rama del árbol acaba en una fórmula que no es un axioma, entonces A no es un teorema.

37.6 *Existe un procedimiento efectivo de demostración para AB*

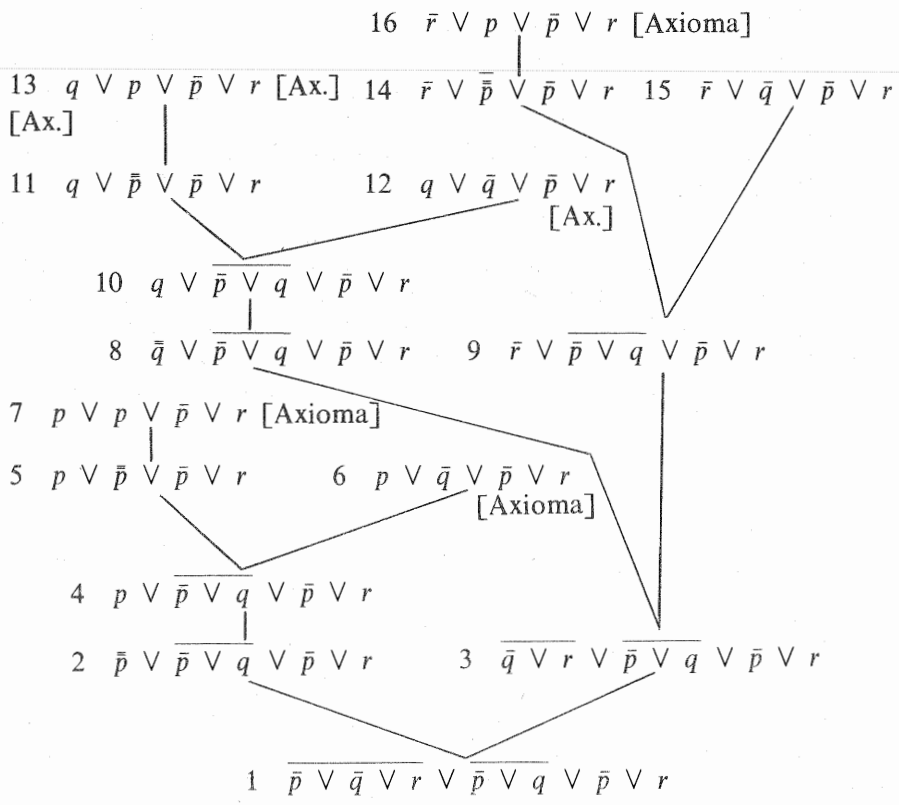
Demostración. Sea A cualquier teorema de AB. Construyamos un árbol para A en la forma habitual. Tomemos las fórmulas del árbol en el orden inverso a aquél en el que aparecen en la construcción del árbol. El resultado es una demostración de A en AB.

Para acabar esta sección, vamos a dar un árbol de demostración para, y una demostración de, la fórmula

$$\overline{\bar{p} \vee \bar{q} \vee r} \vee \overline{\bar{p} \vee q} \vee \bar{p} \vee r$$

que es una transcripción en términos de $\overline{\ }$ y $\vee$ de la fórmula

$$(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$$



Demostración en AB de $\overline{\overline{\bar{p} \vee \bar{q} \vee r} \vee \overline{\bar{p} \vee q} \vee \bar{p} \vee r}$ (Cfr. el árbol de demostración):

16	$\bar{r} \vee p \vee \bar{p} \vee r$	[Axioma]
15	$\bar{r} \vee \bar{q} \vee \bar{p} \vee r$	[Axioma]
14	$\bar{r} \vee \bar{\bar{p}} \vee \bar{p} \vee r$	[16, Regla I]
13	$q \vee p \vee \bar{p} \vee r$	[Axioma]
12	$q \vee \bar{q} \vee \bar{p} \vee r$	[Axioma]
11	$q \vee \underline{\bar{\bar{p}} \vee \bar{p}} \vee r$	[13, Regla I]
10	$q \vee \underline{\bar{p} \vee q} \vee \bar{p} \vee r$	[11, 12, Regla II]
9	$\bar{r} \vee \underline{\bar{p} \vee q} \vee \bar{p} \vee r$	[14, 15, II]
8	$\bar{\bar{q}} \vee \bar{p} \vee q \vee \bar{p} \vee r$	[10, I]
7	$p \vee p \vee \bar{p} \vee r$	[Axioma]
6	$p \vee \bar{q} \vee \bar{p} \vee r$	[Axioma]
5	$p \vee \underline{\bar{\bar{p}} \vee \bar{p}} \vee r$	[7, I]
4	$\underline{p \vee \bar{p} \vee q \vee \bar{p}} \vee r$	[5, 6, II]
3	$\bar{q} \vee \underline{r \vee \bar{p} \vee q} \vee \bar{p} \vee r$	[8, 9, II]
2	$\underline{\bar{\bar{p}} \vee \bar{p} \vee q \vee \bar{p} \vee r}$	[4, I]
1	$\bar{p} \vee \bar{q} \vee r \vee \bar{p} \vee q \vee \bar{p} \vee r$	[2, 3, II]

NOTAS A LA SEGUNDA PARTE

[1] Para ejemplos de conectivas que pueden definirse de esta forma y conectivas que no pueden definirse de esta forma, véase el ejercicio 2 al final de la sección.

[2] '$\wedge$' es un símbolo que representa la conjunción, y '$\vee$' es un símbolo que representa la disyunción [inclusiva].

[2] (bis) Una función total de verdad de *n* argumentos es una función de verdad cuyo dominio es el conjunto de todas las secuencias de *n* términos, los cuales proceden del conjunto {V,F}. En lo que sigue, hay que entender 'función de verdad' como una abreviatura de 'función total de verdad'.

[3] Cf. Hobbes: 'Ya he refutado en muy pocas hojas su Tratado acerca del *Angulo de Contacto*. Y en cuanto a su *Secciones Cónicas*, está de tal manera cubierto por una costra de símbolos que no tuve la paciencia suficiente para examinar si estaba bien o mal demostrado.' (*Six Lessons to the Professors of the Mathematiques... in the University of Oxford*, Lesson v, p. 49 [1656]; en *The English Works of Thomas Hobbes*, ed. Sir William Moresworth, vol. vii (1845), p. 316).

[4] El 'o..., o...' de esta oración intenta ser puramente veritativo-funcional. La cláusula 3 podría expresarse de la siguiente forma: ...sii ni A es verdadera para I, ni tampoco B es verdadera para I'.

[5] La definición de consecuencia semántica en el caso de lenguajes adecuados para la lógica de predicados es más complicada. Ver la 3.ª Parte, secc. 39.

[6] Desde este lugar, y hasta el final de la sección, 'fórmula' se utiliza no sólo para hacer referencia a las fórmulas de P, sino también a fórmulas de lenguajes con conectivas proposicionales veritativo-funcionales distintas de las de P.

[7] Una conectiva proposicional veritativo-funcional es un símbolo *dotado de significado*, y no un símbolo puramente formal.

[8] Suponiendo que se mantengan constantes las nociones de *interpretación de L* y de *verdadero para una interpretación de L*

[9] Entonces: Puesto que Δ es un subconjunto de Γ, $\Gamma = \Gamma \cup \Delta$. Luego todo lo que tenemos que mostrar es que si $\Delta \vdash_P A$ entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash_P A$. Pero esto es simplemente una variante notacional de 20.2. ('Si $\Gamma \vdash_P A$, entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash_P A$'.]

[10] Por diversas razones, resulta difícil saber si su pretensión es correcta o no: cf. Benson Mates, *Stoic Logic*, pp. 81-2.

[11] Por ej., la de Jerzy Loś (1951). Véase también las referencias en la nota 223, p. 285, de Kleene (1967). Stoll (1963, cap. 6, secc. 8-9) ofrece un tratamiento algebráico-booleano de la metateoría de la lógica proposicional veritativo-funcional.

[12] Esto equivale a utilizar la demostración *formal* de $p' \supset p'$ dada en el ejemplo 1, p., de la secc. 22, para disponer de la base de una demostración *en el metalenguaje* de que $\vdash_{SP} A \supset A$ para una fórmula cualquiera A.

[13] En las Partes 3 y 4 usamos frecuentemente una modificación de este concepto que llamamos *completud respecto de la negación*: véase, por ej., la definición que precede a 45.10 y los metateoremas 45.10, 45.13, 45.14, 46.4, 48.3, 51.12, 51.13 (Teorema de Gödel Generalizado).

TERCERA PARTE

Lógica de Predicados de Primer Orden: Consistencia y Completud

38. Un lenguaje formal para la lógica de predicados de primer orden: el lenguaje Q. Los lenguajes Q^+

El lenguaje Q (*)

Símbolos

$p \quad ' \quad x \quad a \quad f \quad F \quad * \quad \sim \quad \supset \quad \wedge \quad (\quad)$

Nombres de las diversas combinaciones de estos símbolos:

Símbolos proposicionales: $p', p'', p''', \ldots$
Variables individuales (*variables*, para abreviar): $x', x'', x''', \ldots$
Constantes individuales (*constantes*, para abreviar): $a', a'', a''', \ldots$
Símbolos funcionales: $f^{*\prime}, f^{*\prime\prime}, f^{*\prime\prime\prime}, \ldots, f^{**\prime}, f^{**\prime\prime}, f^{**\prime\prime\prime}, \ldots, f^{***\prime}, f^{***\prime\prime}, f^{***\prime\prime\prime}, \ldots, \ldots$

es decir, la letra itálica minúscula *f* seguida de uno o más asteriscos y, después, uno o más acentos, es un símbolo funcional (**).

Un símbolo funcional que tiene *n* asteriscos es un *símbolo funcional n-ádico.*

Símbolos predicativos: $F^{*\prime}, F^{*\prime\prime}, F^{*\prime\prime\prime}, \ldots, F^{**\prime}, F^{**\prime\prime}, F^{**\prime\prime\prime}, \ldots, F^{***\prime}, F^{***\prime\prime}, F^{***\prime\prime\prime}, \ldots, \ldots$
es decir, la letra itálica mayúscula *F* seguida de uno o más asteriscos y, después, uno o más acentos, es un símbolo predicativo (***). Un símbolo predicativo que tenga *n* asteriscos es un *símbolo predicativo n-ádico.*
Conectivas: $\sim \quad \supset$
Cuantificador universal: $\wedge$
Paréntesis: ( )

(*) Se mantiene el nombre de Q para este lenguaje ('Quantification'), sin traducirlo por 'C' ('Cuantificación') dada la mención posterior de otro lenguaje 'C' (NT).
(**) Utilizaremos también la terminología 'símbolo de función' (NT).
(***) Utilizaremos también la terminología 'símbolo de predicado' (NT).

Términos: Una constante individual es un término. Una variable individual es un término. Un símbolo funcional *n*-ádico seguido por *n* términos es un término. Ninguna otra cosa es un término.

Términos cerrados: Un término es (está) cerrado sii no aparece en él ninguna variable.

Fbfs

1. Cualquier símbolo proposicional es una fbf (y además una fbf atómica).
2. Si F es un símbolo predicativo *n*-ádico, y $t_1 \cdots t_n$ son términos (no necesariamente distintos), entonces $Ft_1 \cdots t_n$ es una fbf (y además una fbf atómica).
3. Si A es una fbf y v una variable individual, entonces $\wedge$ vA es una fbf.
4. Si A es una fbf, entonces $\sim$A es una fbf.
5. Si A y B son fbfs, entonces (A$\supset$B) es una fbf.
6. Ninguna otra cosa es una fbf.

Alcance

En $\wedge$vA, si A es una fbf, entonces A es el alcance del cuantificador $\wedge$.

Ejemplos:

1. En $\wedge x'(F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime\prime}x'')$ el alcance del cuantificador es $(F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime\prime}x'')$.
2. En $(\wedge x' F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime\prime}x'')$ el alcance del cuantificador es $F^{*\prime}x'$, ya que $F^{*\prime}x' \supset F^{*\prime\prime}x''$ no es una fbf.

Apariciones libres y ligadas de las variables

Una aparición de una variable v está *ligada* en una fbf sii o bien sigue inmediatamente a un cuantificador[1] de la fórmula, o bien está dentro del alcance de un cuantificador[1] que tiene a v como variable suya (es decir, un cuantificador[1] al que le sigue inmediatamente v). En caso contrario, esa aparición (de una variable) está *libre* en la fbf.

Una variable está libre en una fbf si cualquier aparición suya en la fbf está libre, y una variable está ligada en una fbf si cualquier aparición suya en la fbf está ligada. (Así, en la misma fbf una misma variable puede estar libre y ligada.)

Ejemplos:

1. En $\wedge x'(F^{*}{}'x' \supset F^{*}{}'x')$ las dos apariciones de x' están ligadas, mientras que la aparición de x' está libre.

2. En $(\wedge x'F^{*}{}'x' \supset F^{*}{}'x')$ las dos primeras apariciones de x' están ligadas, mientras que la tercera está libre. Luego la variable x' está a la vez libre y ligada en esta fórmula.

De nuestras definiciones se sigue que cualquier aparición de una variable en una fbf *atómica* (es decir, en una fbf sin cuantificadores) está libre.

Notación

Si A es una fbf, t es un término y v una variable, entonces Av/t es la fbf obtenida a partir de A substituyendo todas las apariciones libres de v en A por t.

Ejemplos:

1. Si A es $(\wedge x'F^{*}{}'x' \supset F^{*}{}'x')$, entonces Ax'/x''' es $(\wedge x'F^{*}{}'x' \supset F^{*}{}'x''')$.

2. Si A es $\wedge x'(F^{*}{}'x' \supset F^{*}{}'x')$, entonces Ax'/x'' es el mismo A, puesto que no existe ninguna aparición libre de x'en A.

Definición. t está libre para v en A

t está libre para v en A si (1) si t es una variable, entonces t aparece libre en Av/t siempre que v aparece libre en A, y (2) si t es un término en el que no aparece ninguna variable, entonces siempre que las apariciones libres de v en A se substituyen por t, todas las apariciones de las variables de t siguen estando libres. Si t es un término cerrado, entonces t está libre para v en cualquier fórmula A.

Ejemplos:

1. En $(\wedge x'F^{*}{}'x' \supset F^{*}{}'x')$, x' está libre para x'.
2. En $(\wedge x'F^{*}{}'x' \supset \wedge x'F^{*}{}'x')$ x' no está libre para x'.
3. En $(\wedge x'F^{*}{}'x' \supset F^{*}{}'x')$, $f^{**}{}'x'x'$ está libre para x'.
4. En $(\wedge x'F^{*}{}'x' \supset \wedge x'F^{*}{}'x')$, $f^{**}{}'x''$ no está libre para x'.

Fbfs (u oraciones) cerradas

Una *fbf* cerrada es una fbf en la que no hay ninguna aparición libre de ninguna variable. Una fbf que no sea cerrada es una fbf abierta.

Cierre

1. Si A es una fbf en las que las variables $v_1 \cdots v_n$ tienen apariciones libres, entonces A, precedida de $\wedge v_1 \ldots \wedge v_n$ es un cierre de A. [Puesto que no exigimos que las variables $v_1 \cdots v$ aparezcan libres en A en ese orden, se sigue que, por ej., tanto

$$\wedge x' \wedge x' F^{**'} x' x'$$

como

$$\wedge x' \wedge x' F^{**'} x' x'$$

son cierres de

$$F^{**'} x' x''.]$$

2. Si A es una oración [fbf cerrada], entonces A es un cierre de A, y también lo es $\wedge$ vA, donde v es cualquier variable.

3. Cualquier cierre de un cierre de A es un cierre de A.

De ello se sigue que toda fbf tiene un número infinito de cierres. En vez de un cierre cualquiera de una fórmula A escribimos 'A^c'.

Abreviatura: $\vee$ (*cuantificador existencial*)

$\vee v$A es una abreviatura de $\sim \wedge v \sim$A (siendo v una variable y A una fbf).

A $\vee$ se le llama *cuantificador existencial* o *particular.*

Comentarios

Suponemos que el lector tiene ya cierta familiaridad con el simbolismo de la lógica de predicados de primer orden, de forma que sólo vamos a hacer dos indicaciones:

1. Queremos que los símbolos funcionales simbolicen las partes en itálica de las siguientes oraciones:

(*a*) *El sucesor de* 0 es 1 [se simboliza mediante un símbolo funcional monádico (1-ádico)]

(*b*) *La suma de* 2 *y* 2 es 4 [se simboliza mediante un símbolo funcional diádico (2-ádico)]

(*c*) *La suma del producto de* 4 *y* 5 *y el producto de* 8 *y* 10 es 100 [que podría simbolizarse mediante un símbolo funcional tetrádico (4-ádico): $f(a, b, c, d) = (a \cdot b) + (c \cdot d)$]

2. 'Primer orden' se distingue de 'segundo orden' y de 'orden superior'. La siguiente explicación de lenguajes y predicados de orden superior pasa por alto las complicaciones conectadas con símbolos funcionales, variables funcionales y variables proposicionales. Los símbolos predicativos de Q son de primer orden. Un símbolo predicativo que puede aceptar un símbolo predicativo de primer orden como argumento suyo, pero que no admite como argumento suyo ningún símbolo predicativo de segundo orden o de orden superior es un símbolo predicativo de segundo orden; un símbolo predicativo de tercer orden admitirá como argumentos suyos símbolos predicativos de segundo orden, pero no admitirá como argumentos suyos símbolos predicativos de un orden superior al de segundo orden; y así sucesivamente. Un lenguaje de primer orden permite que los cuantificadores liguen solamente variables individuales; un lenguaje de segundo orden también les permite que liguen variables de predicado de primer orden, pero no de orden superior; un lenguaje de tercer orden les permite que liguen también variables predicativas de segundo orden, pero no de orden superior; y así sucesivamente. Para decirlo semánticamente (que es lo que nos proponemos):

Primer orden: cuantificación sólo sobre individuos.

Segundo orden: cuantificación sobre propiedades de^2 individuos, de la misma forma que sobre individuos.

Tercer orden: cuantificación sobre propiedades de^2 propiedades de^2 individuos, de la misma forma que sobre propiedades de^2 individuos y sobre individuos.

Q^+

Se dice que cualquier sistema formal que se diferencia de Q sólo en que tiene una cantidad enumerable de constantes individuales que no están en Q (supuesto que se dé una enumeración efectiva de esas constantes nuevas) es un lenguaje Q^+.

39. **Semántica para Q (y Q^+)[3]. Definiciones de** *interpretación de* $Q(Q^+)$, *satisfacción* **de una fórmula por una secuencia enumerable de objetos**, *satisfacible*, *simultáneamente satisfacible*, *verdadero para una interpretación de* $Q(Q^+)$, *modelos de una fórmula/conjunto de fórmulas de* $Q(Q^+)$, *fórmula lógicamente válida de* $Q(Q^+)$, *consecuencia semántica* **(para fórmulas de $Q(Q^+)$**, *k-validez*

Nuestra papeleta más importante de la Tercera Parte es una demostración de la completud de un sistema de la lógica de predicados de primer orden, es decir, una demostración de que todas las fórmulas lógicamente válidas de Q son teoremas del sistema. Para ello nos hace falta una definición exacta de *fórmula lógicamente válida de Q*. Y para esto no podemos adoptar la noción de tautología de la Segunda Parte, puesto que hay fórmulas lógicamente válidas de Q que no son instancias de esquemas tautológicos (para el significado de 'instancia de un esquema tautológico de Q', ver más adelante la definición que precede a 40.10). De este hecho proceden la mayoría de las complicaciones que encontraremos a continuación.

Explicación preliminar

Una *interpretación de Q* (Q^+) consiste en la determinación de algún conjunto no-vacío (llamado *dominio* de la interpretación) y en las siguientes asignaciones:

1. A cada símbolo proposicional se le asigna uno de los dos (pero no ambos) valores veritativos verdad y falsedad.
2. A cada constante individual se le asigna algún elemento del dominio de la interpretación.
3. A cada símbolo funcional se le asigna una función que tenga argumentos y valores en el dominio.
4. A cada símbolo predicativo se le asigna alguna propiedad o relación definida respecto a objetos del dominio.

Les damos a las conectivas sus significados veritativo-funcionales habituales[4]. Los cuantificadores se leen como si se refirieran exclusivamente a elementos del dominio de la interpretación; por ej.,

$$\wedge\, x'$$

se lee como

Para cada cosa, x', del dominio

y $\wedge x'F^{*'}x'$ es verdadera para una interpretación dada I sii todo elemento *del dominio de I* tiene la propiedad asignada por I al símbolo predicativo $F^{*'}$.

Para poder dar cuenta de fórmulas en las que las variables aparecen libres, la definición entera de *interpretación de Q* (Q^+) tiene que ser bastante complicada. La noción clave de la definición es la de *satisfacción* de una fórmula por una *secuencia enumerable de objetos*. Además,

en vez de hablar de propiedades y relaciones, hablaremos de *conjuntos de n-tuplas ordenadas* de objetos. Explicaremos todo esto más adelante.

Resulta conveniente recordar algunas de las cosas dichas anteriormente acerca de las secuencias:

Consideraremos a nuestros efectos que una *n-tupla ordenada* es una *secuencia de n términos*. Una secuencia de n términos $\langle r_1 \ldots, r_n \rangle$ es una ordenación de cosas, en la que la misma cosa puede aparecer más de una vez en la ordenación. Por ej., $\langle 1, 2, 3, 1 \rangle$ es una secuencia de cuatro términos en la que aparece el número 1 como primer y cuarto término. Una secuencia s es la misma secuencia que una secuencia s' sii s y s' tienen el mismo número de términos y el primer término de s es el mismo que el primer término de s', el segundo término de s es el mismo que el segundo de s', y así sucesivamente. Luego $\langle 1, 2, 3 \rangle \neq \langle 3, 2, 1 \rangle$, aunque $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ y $\langle 1, 2, 1 \rangle \neq \langle 1, 2 \rangle$ aunque $\{1, 2, 1\} = \{1, 2\}$.

Semántica para Q (Q^+): explicación completa

Vamos a definir en primer lugar qué es, para una secuencia s, satisfacer una fórmula A. Vamos a considerar sucesivamente todas las formas que puede adoptar A.

Satisfacción de una fórmula A por una secuencia s (para una interpretación dada I)

Sea I una interpretación cualquiera de Q (Q^+) y sea D su dominio. Sea s una secuencia enumerable cualquiera cuyos términos son elementos de D. Sea A una fórmula cualquiera de Q (Q^+).

En la definición de *satisfacción* utilizaremos la siguiente enumeración invariable de las variables de Q (Q^+): x' ha de ser la primera variable de nuestra enumeración; x seguida por un número k de acentos será la k-ésima variable de nuestra enumeración.

1. Supongamos que A es un símbolo proposicional. Entonces *s satisface A sii I asigna a A el valor veritativo verdad.*

Ejemplos: Sea I una interpretación de Q (Q^+) cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Asigne I a p' el valor veritativo verdad, y a p'' el valor veritativo falsedad (falso). Para una más fácil lectura, escribiremos p' como p, y p'' como. q. Así tenemos: I asigna V a p y F a q. Sea s la secuencia enumerable con repeticiones $\langle 5, 10, 15, 5, 10, 15, 5 \ldots \rangle$. Entonces:

s satisface p
s no satisface q

Nótese que para hacer si *s* satisface o no un *símbolo proposicional*, no es necesario saber nada acerca de *s*, salvo que es una consecuencia enumerable de objetos de D.

2. Supongamos que A tiene la forma $\sim$B. Entonces *s* satisface A sii *s* no satisface B.

Ejemplos: Sean I y *s igual que antes. Entonces:*

s no satisface $\sim p$
s satisface $\sim q$

3. Supongamos que A es de la forma (B$\supset$C). Entonces *s* satisface A sii *s* no satisface B o *s* satisface C (o ambas cosas). [El 'o' se entiende desde un punto de vista puramente veritativo-funcional.]

Ejemplos: Sean I y *s* igual que antes. Entonces:

s satisface $q \supset$ p, q $\supset$ q, q $\supset = $p, q $\supset = $q
s satisface $p \supset p$, $\sim p \supset p$, $\sim q \supset p$
s satisface $p \supset \sim q$, $\sim p \supset \sim q$, $\sim q \supset \sim q$
s no satisface $p \supset q$, $p \supset \sim p$, $\sim q \supset q$, $\sim q \supset \sim p$

4. Supongamos que A es una fbf atómica cerrada sin símbolos funcionales, y sin símbolos proposicionales. Entonces tiene la forma $Fc_1 \ldots C_n$, donde F es un símbolo predicativo *n*-ádico y $c_1, \ldots, c_n$, donde F es un símbolo predicativo *n*-ádico y $c_1, \ldots, c_n$ son constantes individuales (no necesariamente distintas). Por definición, I asigna algún elemento de D a cada constante individual: sean $d_1, \ldots d_n$ los elementos de D asignados respectivamente a las constantes $c_1, \ldots, c_n$ (siendo dichos elementos no necesariamente distintos). Entonces *s* satisface A sii la *n*-tupla ordenada $\langle d_1, \ldots d_n \rangle$ es un elemento del conjunto de *n*-tuplas ordenadas asignado por I al símbolo predicativo F.

Ejemplos: Sean I y *s* igual que antes. Asigne I el número 1 a la constante *a'* el número 2 a la constante a'', y así sucesivamente. Asigne I a *F***''* la relación de *ser mayor que* (>). Abreviamos *F''* mediante G. Entonces:

s satisface Ga_4a_3 (puesto que el número asignado a a_4, esto es 4, es mayor que el número asignado a a_3 que es 3.
s no satisface Ga_3a_4
s satisface $Ga_{59}a_{58}$
s no satisface Ga_5a_{105}

De nuevo sucede que no tenemos que fijarnos en *s*.

5. Supongamos que A es una fbf atómica de la forma $Fv_1 \ldots v_n$ donde F es un símbolo predicativo *n*-ádico y $v_1, \ldots, v_n$ son variables individuales (no necesariamente distintas). A cada variable v_i le asignamos un término en *s* de la forma siguiente: si v_i es la *k*-ésima variable de nuestra enumeración de todas las variables de Q (Q^+), entonces le asignamos el *k*-ésimo término de la secuencia *s*. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (no necesariamente distintos) los términos de *s* asignados respectivamente a las variables $v_1, \ldots v_n$. Entonces *s* satisface A sii la *n*-tupla ordenada $\langle d_1, \ldots d_n \rangle$ es un elemento del conjunto de las *n*-tuplas ordenadas que I asigna al símbolo predicativo F.

Ejemplos: En esta ocasión tenemos que fijarnos en *s*. Sean I, etc., igual que antes. Abreviamos *x'* mediante x_1, *x''* mediante x_2, etc. Entonces:

- *s* satisface Gx_3x_4 (puesto que el tercer término de *s*, que es 15, es mayor que el cuarto término, que es 5).
- *s* no satisface Gx_2x_5 (puesto que el segundo término de *s*, que es 10, no es mayor que el quinto término, que es 10).
- *s* satisface Gx_6x_1
- *s* no satisface Gx_1x_1

6. Supongamos que A es una fbf atómica que tiene la forma $Ft_1 \ldots t_n$, donde F es un símbolo predicativo n-ádico y $t_1, \ldots, t_n$ son términos sin símbolos funcionales. Cada t_i es una constante individual o una variable individual. Si t_i es una constante, I le asigna un elemento (al que llamaremos d_i) de D. Si t_i es una variable, entonces existe algún número *k* tal que t_i es la *k*-ésima variable de nuestra enumeración de las variables, y asignamos a t_i el *k*-ésimo término de la secuencia *s:* llamemos a este objeto también d_i. [Luego si t_i es una constante, entonces d_i es el elemento de D que I asigna a la constante, y si t_i es una variable, entonces si t_i es la *k*-ésima variable de nuestra enumeración entonces d_i es el *k*-ésimo término de *s*. Todo término de *s* es un elemento de D.] Entonces *s* satisface A sii $\langle d_1, \ldots, d_n \rangle$ es un elemento del conjunto de *n*-tuplas ordenadas que I asigna al símbolo predicativo F.

Ejemplos: Sean I, etc., igual que antes. Entonces:

- *s* satisface $Ga_{29}x_{10}$ (puesto que 29 es mayor que el décimo término de *s*, que es 5).
- *s* no satisface Ga_9x_{11} (puesto que 9 no es mayor que el undécimo término de *s*, que es 10).

7. Supongamos que A tiene la forma $\wedge v_k$ B, donde v_k es la k-ésima variable de nuestra enumeración. Entonces *s* satisface A sii *toda secuencia enumerable de elementos de D que se diferencia de s* en como máximo el *k*-ésimo término satisface B. Es decir, *s* satisface A sii, sin tener en cuenta qué elemento de D pongamos en lugar del *k*-ésimo término de *s*, la consecuencia resultante satisface B.

Ejemplos: Sean I, etc., igual que antes. Sea H una abreviatura de F**'''', a la que I asigna la relación *ser mayor, o igual que* ($\geqslant$). Recordemos: $s = \langle 5, 10, 15, 5, 10, 15, 5, ... \rangle$.)

Entonces:

- *s* satisface $\wedge x_1 H x_1 x_1$ (puesto que toda secuencia enumerable de enteros positivos que se diferencia de *s* en como máximo el primer término satisface Hx_1x_1, puesto que todo entero positivo *s* es mayor que, o igual a sí mismo).
- *s* no satisface $\wedge x_3 H x_3 x_4$ (puesto que, aunque *s* satisface Hx_3x_4, no toda secuencia enumerable de enteros positivos que se diferencia de *s* en como máximo el tercer término la satisface: por ej. la secuencia no lo hace).
- *s* satisface $\wedge x_{59} H x_{59} a_1$ (puesto que todo entero positivo es mayor que, o igual a, 1)
- *s* no satisface $\wedge x_{59} H x_{59} a_2$ (puesto que no todo entero positivo es mayor que, o igual a, 2:1 no lo es)
- *s* satisface $\wedge x_{59} H x_{59} x_{59}$
- *s* no satisface $\wedge x_{59} H x_{59} x_1$ (no todo entero positivo es mayor que, o igual a, el primer término de *s* que es 5)

Los Casos 1-7 agotan todas las posibilidades de A, excepto los casos en los que A contiene símbolos funcionales. Por lo tanto, tenemos que incluir tales casos.

8. Supongamos que t es un término que tiene la forma $fc_1, \ldots c_n$, donde f es un símbolo funcional *n*-ádico y $c_1, \ldots, c_n$ son constantes individuales. Sea *f* la función que I asigna a f. Sean $d_1, \ldots, d_n$ los objetos de D que I asigna a las constantes $c_1, \ldots, c_n$. Entonces el objeto d asignado por I a t es el objeto de D que tiene el valor de la función *f* para los argumentos $d_1, \ldots, d_n$: es decir, $d = f(d_1, \ldots, d_n)$.

Ejemplos: Sean I, *s*, etc., igual que antes. Asigne I a *f**' la función sucesor: luego '*f**'...' significa 'el sucesor de...'

Entonces:

$f^{*\prime}a_2$ tiene asignado el número 3
$f^{*\prime}a_{59}$ tiene asignado el número 60

9. Supongamos que t es un término que tiene la forma $fv_1 \ldots v_n$ donde $v_1, \ldots, v_n$ son variables individuales. Sean $d_1, \ldots, d_n$ los términos [objetos] de la secuencia s asignados a $v_1, \ldots, v_n$ de acuerdo con lo que establecía la cláusula 5 más arriba. Sea f igual que antes. Entonces

Ejemplos: Sean I s, etc., igual que antes. Entonces:

$f^{*\prime}x_1$ tiene asignado el número 6 (el sucesor del primer término de s, que es el número 5).
$f^{*\prime}x_2$ tiene asignado el número 11.

10. Supongamos que t es un término que tiene la forma $ft_1 \cdots t_n$ en donde $t_1, \ldots, , t_n$ son términos con símbolos funcionales seguidos de variables o constantes individuales. Sean $d_1, \ldots, , d_n$ los objetos de D asignados a $t_1, \ldots, , t_n$ de acuerdo con lo que establecen más arriba las cláusulas 8 y 9. Sea f igual que antes. Entonces $d = f(d_1, \ldots, d_n)$.

Ejemplos: Sean I, s, etc., igual que antes. Entonces:

$f^{*\prime}f^{*\prime}a_1$ tiene asignado el número 3 (el sucesor del sucesor de 1).
$f^{*\prime}f^{*\prime}x_1$ tiene asignado el número 7 (el sucesor del sucesor del primer término de s).

11. Supongamos que t es un término que tiene la forma $ft_1 \ldots, t_n$ donde $t_1, \ldots, t_n$ son términos cualesquiera (incluyendo términos con símbolos funcionales). Sean $d_1, \ldots, d_n$ los objetos de D asignados a $t_i, \ldots, t_n$ según lo establecido más arriba en las cláusulas 8, 9 y 10. Sea f igual que antes. Entonces $d = f(d_1, \ldots, d_n)$.

Ejemplo: Asígnese a $f^{**\prime}$ la función suma: luego $f^{**\prime}xy$ significa 'la suma de x e y'. Entonces (siendo s, etc., igual que antes): $f^{**\prime}f^{*\prime}x_2f^{*\prime}f^{*\prime}a_1$ tiene asignado el número 14 (la suma del número asignado a $f^{*\prime}x_2$, que es 11, y el número asignado a $f^{*}f^{*\prime}a_1$, que es 3).

Podemos escribir esta definición de satisfacción bajo una forma más resumida de la manera siguiente: Sea I una interpretación con dominio D. Sea t un término cualquiera, y sea s una secuencia enumerable cualquiera de elementos de D. En primer lugar definimos una función, *, que tiene como argumentos términos de Q (Q^+) y que toma valores en D, mediante la siguiente regla:

Si t es una constante, entonces t*s es el elemento de D asignado por I a la constante t.

Si t es la k-ésima variable de nuestra enumeración, entonces t*s es el k-ésimo término de s.

Si t es de la forma $ft_1 \cdots t_n$, donde f es un símbolo funcional n-ádico $t_1 \ldots, t_n$ son términos, y f es la función asignada por I a f, entonces $t^*s = f(t_1^* s, \ldots, t_n^* s)$.

Definimos ahora la satisfacción:

1. Si A es un símbolo proposicional, entonces s satisface A sii I asigna el valor veritativo verdad (verdadero) a A.
2. Si A es una fbf atómica que tiene la forma $Ft_1 \ldots t_n$, donde F es un símbolo predicativo n-ádico y $t_1 \cdots t_n$ son términos, entonces s satisface A sii $\langle t_1^* s \ldots, t_n^* s\rangle$ es un elemento del conjunto de n-tuplas ordenadas que I asigna a F.
3. Si A tiene la forma $\sim$B, entonces s satisface A sii s no satisface B.
4. Si A tiene la forma (B$\supset$C), entonces s satisface A sii s no satisface B o s satisface C.
5. Si A es de la forma $\wedge v_k$B donde v_k es la k-ésima variable de nuestra enumeración, entonces s satisface A sii toda secuencia enumerable de elementos de D que se diferencien de s en como máximo el k-ésimo término, satisface B.

   [Para obtener en lo que sigue la correspondiente definición para Q^+ basta simplemente con reemplazar 'Q' por 'Q^+'.]

Definición. Una fórmula A de Q es *satisfacible* sii existe alguna interpretación I de Q para la cual se satisfaga A [es decir, si existe una interpretación I tal que A sea satisfecha por al menos una secuencia enumerable de elementos del dominio de I].

Ejemplos [para mayor simplicidad, escribimos F, x, y en vez de $F^{*\prime}$, x', x'']:

1. $Fx \supset \sim Fy$ es satisfacible.
2. $Fx \supset \sim Fx$ es satisfacible.
3. $\sim(Fx \supset Fx)$ no es satisfacible.

Definición. Un conjunto Γ de fórmulas de Q es *simultáneamente satisfacible* sii para alguna interpretación I de Q alguna secuencia s satisface a todo elemento de Γ.

Ejemplos:
1. $\{Fx, \sim Fy\}$ es simultáneamente satisfacible.
2. $\{Fx, \sim Fx\}$ no es simultáneamente satisfacible.

Definición. Una fbf A de Q es *verdadera para una interpretación dada I de Q* sii *toda* secuencia enumerable de elementos del dominio de I satisface A.

Definición. Una fbf A de Q es *falsa para una interpretación dada I de Q* sii *ninguna* secuencia enumerable de elementos del dominio de I satisface A.

Una fórmula en la que alguna variable tenga alguna aparición libre *puede* que no resulte ni verdadera ni falsa para una interpretación dada. Por ej., $Fx \supset \sim Fy$ no es ni verdadera ni falsa para una interpretación I en la que D es el conjunto de los números naturales y '*F*' significa 'es par'. Cfr. 40.6 y 40.7, en las pp. 152, 153.

N. B. '*Satisfacer*' *no significa* '*hacer verdadero*'. Una secuencia *s* puede *satisfacer* una fórmula A, para una interpretación I, sin que A sea *verdadera* para I. Por ejemplo: Sean I, *s*, *G*, x_1 y x_2 como en los ejemplos de las pp. 143-4, más arriba. Entonces *s satisface* Gx_2x_1 (puesto que 10 es mayor que 5), pero Gx_2x_1 *no* es verdad para I (puesto que no *toda* secuencia de elementos del dominio de I satisface Gx_2x_1: por ejemplo, la secuencia $\langle 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ no la satisface).

Definición. Una interpretación I de Q es un *modelo de una fórmula A de Q* sii A es verdadera para I.

Definición. Una interpretación I de Q es un *modelo de un conjunto* Γ *de fórmulas de Q* sii toda fórmula de Γ es verdadera para I.

Definición. Un *sistema formal tiene un modelo* sii el conjunto de todos sus teoremas tiene un modelo.

Definición. Una fórmula A de Q es una *fórmula lógicamente válida de Q* [$\vdash_Q A$] sii A es verdadera para *toda* interpretación de Q.

[Recuérdese que toda interpretación de Q debe, por definición, tener un dominio no-vacío.]

Definición. Una fórmula B de Q es una *consecuencia semántica de una fórmula A de Q* [$A \vdash_Q B$] sii para toda interpretación de Q, toda secuencia que satisface A satisface también B: es decir, si no existe ninguna secuencia que satisfaga A y no satisfaga también B.

Si ninguna secuencia satisface A, entonces cualquier fórmula de Q es una consecuencia semántica de A.

Definición. Una fórmula A de Q es una *consecuencia semántica de un conjunto* Γ *de fórmulas de Q* [$\Gamma \models_Q A$] sii para toda interpretación de Q toda secuencia que satisfaga cada elemento de Γ satisface también A: es decir, si no existe ninguna secuencia que satisfaga a todo elemento de Γ y que no satisfaga también A.

Nota. Vale la pena comparar estas definiciones con las definiciones correspondientes para P: por ej., 'Una fórmula B de P es una consecuencia semántica de una fórmula A de P sii no existe ninguna interpretación de P para la cual A sea verdadera y B falsa'. Que no exista ninguna interpretación de Q para la cual A sea verdadera y B falsa *no* es una condición suficiente para que una fórmula cualquiera B de Q sea una consecuencia semántica de una fórmula A de Q. El requisito para que las fórmulas de Q sean una consecuencia semántica es más fuerte. Por ejemplo, no existe ninguna interpretación de Q para la cual Fx sea verdadera y $\wedge\, xFx$ sea falsa. Pero $\wedge\, xFx$ no es una consecuencia semántica de Fx, ya que no es verdad que para toda interpretación de Q toda secuencia que satisface a Fx satisfaga también a $\wedge\, xFx$.

Definición. Una fórmula de Q es *k-válida* sii es verdadera para toda interpretación de Q que tenga un dominio de exactamente k elementos.

El conjunto vacío ϕ

Por convención, toda secuencia enumerable satisface el conjunto vacío. Luego:

39.1 $\phi \models_Q A$ *sii* $\models_Q A$ [Lo mismo para Q^+]

Cfr. 19.1.

Nota final a la secc. 39

Para la secc. 39 resultan básicas:

I. La diferencia entre
   (1) *s satisface A,*
   (2) *A es verdadera para I,* y
   (3) *A es lógicamente válida.*

II. La noción de *consecuencia semántica para Q.*

Se aconseja al lector que no siga adelante hasta que no haya comprendido suficientemente I y II.

EJERCICIOS

1. Sea I_1 una interpretación de Q cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos $\{1, 2, 3, \ldots\}$. I_1 asigna al símbolo predicativo G [es decir, a $F^{**\prime\prime\prime}$] la relación $\leqslant$. Sea s la secuencia enumerable $\langle 2, 5, 8, 1, 7, 3, 3, 3 \ldots, 3 \ldots, \rangle$. Abreviamos x', x'', x''' $\ldots$, mediante x_1, x_2, x_3, $\ldots$ y $F^{*\prime}$ mediante F.

(i) ¿Satisface s la fórmula Gx_2x_3 (para la interpretación I_1)?

(ii) ¿Satisface s la fórmula Gx_3x_4 (para la interpretación I_1)?

(iii) ¿Es Gx_2x_3 verdadera para I_1?

(iv) ¿Es Gx_2x_2 verdadera para I_1?

(v) ¿Es I_1 un modelo del conjunto de fórmulas $\{Gx_{49}x_{107}, \wedge x_2 \wedge x_3 Gx_2x_3\}$?

(vi) ¿Es I_1 un modelo del conjunto de fórmulas $\{Gx_5x_5, \wedge x_{72}Gx_{72}x_{72}\}$?

(vii) ¿Es Gx_5x_5 lógicamente válida?

(viii) ¿Es Gx_2x_1 satisfacible?

(ix) ¿Es Fx_{13} una consecuencia semántica de $\wedge x_2 Fx_2$?

(x) ¿Es Fx_{13} una consecuencia semántica de $\sim \wedge x_2 Fx_2$?

(xi) ¿Es Fx_{13} una consecuencia semántica de $\sim(\wedge x_2 Fx \supset \wedge x_2 Fx_2)$?

2. Sea I_2 una interpretación de Q cuyo dominio es el conjunto de los números pares $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, I_2 asigna al símbolo predicativo G la relación $\leqslant$.

(i) Indíquese una secuencia enumerable de objetos que satisfaga la fórmula Gx_4x_5 para la interpretación I_2.

(ii) Indíquese una secuencia enumerable de objetos que no satisfaga la fórmula Gx_4x_5 para la interpretación I_2.

(iii) Indique una fórmula que sea verdadera para I_2.

(iv) Indique una fórmula que no sea verdadera para I_2.

(v) Indique un conjunto de fórmulas para el cual I_2 sea un modelo.

(vi) Indique un conjunto de fórmulas para el cual I_2 no sea un modelo.

(vii) Indique una fórmula que sea lógicamente válida.

(viii) Indique una fórmula que no sea lógicamente válida.

(ix) Indique una fórmula que sea satisfactible.

(x) Indique una fórmula que no sea satisfactible.

RESPUESTAS

1. (i) Sí.

(ii) No.

(iii) No. Una fórmula es *verdadera* para I_1 sii es satisfecha por toda secuencia enumerable de enteros positivos. La secuencia $\langle 2, 8, 2, 2, 2, \ldots . \rangle$, por ejemplo, no satisface Gx_2x_3.

(iv) Sí: pero no sólo porque $5 \leqslant 5$, sino porque, para cada entero positivo n, $n \leqslant n$.

(v) No. Si I_1 tiene que ser un modelo de este conjunto, *toda* secuencia enumerable de enteros positivos tiene que satisfacer simultáneamente ambas fórmulas. Una secuencia (entre muchas otras) que no satisface $Gx_{49}\ x_{107}$ es una secuencia cuyo 49-ésimo término sea 2 y cuyo 107-ésimo término sea 1. Luego I_1 no es un modelo de este conjunto.

(vi) Sí.

(vii) No. Es verdad para I_1, pero no es verdad para *toda* interpretación de Q; por ejemplo, no es verdad para una interpretación en la cual se asigne a G la relación $>$.

(viii) Sí.

(ix) Sí.

(x) No.

(xi) Sí. Ninguna secuencia satisface $\sim(\wedge x_2Fx_2 \supset \wedge x_2Fx_2)$.

2. (i) Por ej., la secuencia $\langle 2, 4, 6, 8, 10, \ldots \rangle$ o la secuencia $\langle 2, 4, 6, 8, 8, 10, 12, \ldots \rangle$, o la secuencia $\langle 8, 6, 4, 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2, 4, \ldots \rangle$.

(ii) Por ej., la secuencia $\langle 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2, 4, 6, \ldots \rangle$.

(iii) Por ej., $\wedge x_5Gx_5x_5$.

(iv) Por ej., Gx_1x_2.

(v) Por ej., $\{Gx_{17}x_{17}, \wedge x_9Gx_9Gx_9\}$ o $\{Gx_{17}x_{17}, \wedge x_9Gx_9x_9, p' \supset p'\}$.

(v) Por ej., $\{Gx_{17}x_{17}, \wedge x_9Gx_9x_9.\ Gx_1x_2\}$ o $\{Gx_{17}x_{17}, \wedge x_9Gx_9x_9, \sim(p' \supset p')\}$.

(vii) Por ej., $Fx_1 \supset Fx_1$ o $Fx_1 \supset \wedge x_2Fx_1$ [Cfr. 40.13, más adelante].

(viii) Por ej., $Fx_1 \supset \wedge x_1Fx_1$ [tómese, por ej., una interpretación I_3 con dominio $\{1, 2\}$ que asigne a F la propiedad de *ser un número par*. Entonces, la secuencia $\langle 2, 2, 2, 2, 2, \ldots . \rangle$ satisface Fx_1 pero no satisface $\wedge x_1Fx_1$].

(ix) Por ej. $Fx_1 \supset Fx_2$.

(x) Por ej., $\sim(Fx_1 \supset Fx_1)$.

40. Algunos metateoremas de Q (y Q^+) desde el punto de vista de la teoría de modelos

[Esta sección reúne diversos resultados a los que se hará referencia más adelante. Podría omitirse en una primera lectura, o bien podrían omitirse solamente las demostraciones de los metateoremas.]

Desarrollamos la teoría de modelos de Q (Q^+) sólo en la medida en que la necesitamos para demostraciones posteriores.

Lo que sigue son consecuencias más o menos inmediatas de las definiciones de la secc. 39:

40.1. *Si A es lógicamente válida, entonces* $\sim A$ *no es satisfacible*

40.2. *El Modus Ponens para* $\supset$ *preserva la satisfacción-mediante-s* [*es decir, si una secuencia s satisface A y también* $A \supset B$, *entonces también satisface B*]

40.3. *El Modus Ponens para* $\supset$ *preserva la verdad-para-I* [*es decir, si A y* $A \supset$ B son ambos verdaderos para una interpretación I, entonces *B también es verdadero para I*]

40.4. *El Modus Ponens para* $\supset$ *preserva la validez lógica* [*es decir, si A y* $A \supset B$ *son ambos lógicamente válidos, entonces también lo es B. O: Si* $\vdash_Q A$ *y* $\vdash_Q A \supset B$, *entonces* $\vdash_Q B$]

[La referencia al Modus Ponens, y por lo tanto a la teoría de la demostración, en los enunciados de 40.2-40.4 no es esencial. Se pone simplemente para indicar un uso posterior de esos metateoremas.]

40.5. *A es falsa para una interpretación dada I sii* $\sim A$ *es verdadera para I; y A es verdadera para I sii* $\sim A$ *es falsa para I*

40.6. *A es verdadera para I sii* $\wedge v A$ *es verdadera para I para una variable v cualquiera*[5]

40.7 *A es verdadera para I sii un cierre cualquiera de A es verdadero para I.*

40.8 *A es lógicamente válida sii* A^c *lo es* (A^c *es un cierre cualquiera de A*).

Los siguientes enunciados son menos inmediatos:

40.9 $V \vee A$ *es satisfacible para una interpretación I sii A es satisfacible para la misma interpretación*

Demostración. Sea I una interpretación con dominio D, y sean s y s' secuencias enumerables de elementos de D.

1. Sea s cualquier secuencia que satisfaga $\vee v A$, es decir, $\sim A v \sim A$. Entonces s no satisface $\wedge v \sim A$. Luego no toda secuencia enumerable de elementos de D satisface $\sim A$. Sea s' una secuencia que no satisface $\sim A$.

Entonces s' satisface a A. Luego si $\forall v A$ es satisfacible para I, entonces A es satisfacible para I.

2. Supongamos que ninguna secuencia enumerable de elementos de D satisface $\forall v A$, es decir $\sim \wedge v \sim A$. Entonces toda secuencia de elementos de D satisface $\wedge v \sim A$. Luego toda secuencia satisface $\sim A$ para I: Luego ninguna secuencia satisface A para I. Luego si alguna secuencia satisface A para I, entonces alguna secuencia satisface $\forall x A$ para I.

Definición. Si A es una tautología de P cuyos únicos símbolos proposicionales son $P_1, \ldots, P_n$ entonces el resultado de substituir $P_1, \ldots, P_n$ por las fbfs $Q_1, \ldots, Q_n$ de Q respectivamente en A es una *instancia de un esquema tautológico de Q.*

Lo mismo sucede en el caso de Q^+.

40.10 *Toda instancia de un esquema tautológico de Q (Q^+) es lógicamente válida*

Esquema de la demostración. Sea X un esquema tautológico cualquiera de Q. Sea *s* una secuencia enumerable cualquiera de elementos del dominio de una interpretación cualquiera de elementos del dominio de una interpretación cualquiera de Q (Q^+). Como consecuencia de la definición de satisfación se deriva que, para cualquier fbf A de Q (Q^+), o bien *s* satisface A, o bien *s* no satisface A. Construimos una tabla para X que es igual que una tabla de verdad, salvo en que en vez de escribir 'V' y 'F', escribimos 'Sí' (con el significado de '*s* satisface') y 'No' (con el significado de '*s* no satisface'). Entonces, por las cláusulas 3 y 4 de la definición abreviada de *satisfacción* (p. 172), X tendrá un 'Sí' en todas las asignaciones de 'Sí' y 'No' a sus letras esquemáticas. Pero *s* era una secuencia cualquiera. Luego toda secuencia satisface cualquier instancia de X.

Ejemplo: Sea X el esquema $A \supset (\sim B \supset \sim A \supset B))$

A	B	A	$\supset$	$(\sim$	B	$\supset$	$\sim$	(A	$\supset$	B))
Sí	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí
No	Sí	No	Sí	No	Sí	Sí	No	No	Sí	Sí
Sí	No	Sí	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí	No	No
No	No	No	Sí	Sí	No	No	No	No	Sí	No
			*							

40.11 $\wedge v_k(A \supset B) \supset (\wedge v_k A \supset \wedge v_k B)$ *es lógicamente válida, para fbfs cualesquiera A y B, y una variable cualquiera* v_k.

Demostración. Supongamos que no es así. Entonces para alguna interpretación existe una secuencia *s* que satisface [una instancia de] $\wedge v_k(A \supset B)$ y [la correspondiente instancia de] $\wedge v_k A$, pero que no satisface [la correspondiente instancia de] $\wedge v_k B$. Tenemos que *s* satisface $\wedge v_k(A \supset B)$ y $\wedge v_k A$ sii toda secuencia que se diferencie de *s* en como máximo el *k*-ésimo término satisface $A \supset B$ y A. Pero por 40.2, todas las secuencias de ese tipo también satisfacen B, y por lo tanto, *s* satisface $\wedge v_k B$. Pero esto contradice nuestro supuesto inicial.

Notación:

Sea I una interpretación, D su dominio, y *s* una secuencia enumerable de elementos de D.

s(k/d) es la secuencia que resulta de reemplazar el k-ésimo término de la secuencia *s* por el objeto d.

t**s* es el elemento de D asignado por I al término t para la secuencia *s*, como en la secc. 39: es decir:

Si t es una constante individual c, entonces t**s* es el elemento de D asignado por I a c.

Si t es v_k, entonces t**s* es el *k*-ésimo término en *s*.

Si t es un símbolo funcional *n*-ádico *f* seguido por *n* términos, $t_1, \ldots, t_n$, y *f* es la función asignada por I a f, entonces $t^*s = [ft_1 \ldots t_n]^*s = f(t_1{}^*s, \ldots, t_n{}^*s)$.

40.12 *Sea I una interpretación con dominio D. Sea A una fbf cualquiera. Sean s y s' dos secuencias tales que, para cada variable libre v en A, si v es la k-ésima variable de la enumeración fijada de las variables, entonces s y s' tienen para sus k-ésimos términos el mismo elemento de D. Entonces s satisface A sii s' satisface A.*

Demostración.[6] Por inducción sobre el número, *n*, de conectivas y cuantificadores de A.

Base: $n = 0$

Entonces A es atómica. 2 casos:

1. A es un símbolo proposicional.
2. A tiene la forma $Ft_1, \ldots t_m$, en donde F es un símbolo predicativo *m*-ádico y $t_1, \ldots, t_m$ son términos

Caso 1. Trivial.

Caso 2. Asigne I a F la relación R (si F es un símbolo predicativo monádico, entonces R es una propiedad. Pero, para mayor brevedad, hablaremos de ahora en adelante de R como de una relación). s satisface A sii $t_1^*s, \ldots, t_m^*s'$ están en la relación R. Demostraremos que, para cada t_i, $t_i^*s = t_i^*s'$.

(i) Si t_i es una constante, entonces $t_i^*s = t_i^*s'$.

(ii) Si t_i es una variable v_k, entonces, puesto que A es atómica, t_i es una variable v_k, entonces, puesto que A atómica, t_i está libre, y por lo tanto, por la hipótesis del teorema, el k-ésimo término de s = el k-ésimo término de s'; es decir, $t_i^*s = t_i^*s'$.

(iii) Supongamos que t_i es $ft_{j_1} \ldots t_{j_r}$ (es decir, un símbolo funcional r-ádico seguido por r términos). Si cada uno de los $t_{j_1}, \ldots, t_{j_r}$ es una constante o una variable libre, entonces $t_{j_i}^*s = t_{j_i}^*s'$, por (i) y (ii). Si en t_{j_i} aparece cualquier símbolo funcional, entonces, puesto que las funciones asignadas por I a símbolos funcionales cualesquiera son las mismas para s y s', sus valores para los mismos argumentos serán los mismos. Esto vale también para la función asignada por I a f. Luego también en este caso $t_i^*s = t_i^*s'$.

Paso de la Inducción

Supongamos que el teorema vale para todas las A con menos de q cuantificadores y conectivas. Hay que demostrar que vale para toda A que tenga q conectivas y cuantificadores. Tres casos:

1. A es $\sim$B.
2. A es B$\supset$C.
3. A es $\wedge v_p B$[v_p es una variable. En este caso no utilizamos 'k' como subscripto porque en la demostración del Caso 3, k y p podrán ser distintas.]

Caso 1. A es $\sim$B. Por la hipótesis de la inducción, s satisface B si s' satisface B. Luego s no satisface A sii s' no satisface A.

Caso 2. A es B$\supset$C. Lo mismo.

Caso 3. A es $\wedge v_p$B. Supongamos que s satisface A. Entonces satisface B para todo d_i del dominio D. Para cada variable libre v_k de A, s y s' tienen en común su k-ésimo término, *ex hypothesi*. Luego para cada d_i del dominio D. Para cada variable libre v_k de A, s y s' tienen en común su k-ésimo término, *ex hypothesi*. Luego para cada d_i y cada variable libre v_k de A, $s(p/d_i)$ y $s'(p/d_i)$ tienen en común su k-ésimo término. (Intuitivamente: si para alguna variable libre v_k de A, el p-ésimo término

es el k-ésimo término, entonces el p-ésimo término es el mismo en $s(p/d_i)$ y en s' (p/d_i) esto es, d_i. Si no es el k-ésimo término para una v_k libre, entonces todavía s (p/d_i) y $s'(p/d_i)$ tienen en común su k-ésimo término, puesto que lo tienen s y s'.) Luego por la hipótesis de la inducción, $s'(p/d_i)$ satisface B para todo d_i de D. Luego s' satisface A. Y por un argumento semejante, se establece que si s' satisface A, entonces s también la satisface.

40.13 *Si v_k no aparece libre en A, entonces $A \supset \wedge v_k A$ es lógicamente válida (siendo A una fbf cualquiera)*

Demostración. Supongamos que s satisface A. Sea s' cualquier secuencia que se diferencie de s en como máximo el k-ésimo término. Entonces la hipótesis de 40.12 se aplica a s y a s', y por lo tanto s' satisface A. Pero s' era una secuencia *cualquiera* que se diferencia de s en como máximo el k-ésimo término. Luego toda secuencia que se diferencie de s en como máximo el k-ésimo término satisface A. Luego s satisface $\wedge \vee_k A$.

40.14[6] *Sean t y u términos. Sea t' el resultado de reemplazar por u cada aparición de v_k en t. Sea s una secuencia, y sea $U^*s = d$: es decir sea d el elemento de D asignado por I a u para la secuencia s. Sea s', $s(k/d)$: es decir, sea s' la secuencia que resulta de substituir el k-ésimo término de s por el d. Entonces $t'^*s = t^*s'$: es decir, el elemento de D asignado por I a t' para la secuencia s es el mismo que el elemento de D asignado por I a t para la secuencia s'.*

Ejemplo: Sea t, v_k. Sea u, v_j. Entonces t' es v_j. Entonces d es el j-ésimo término de s; y s' se diferencia como máximo de s en que como k-ésimo término tiene a d. Entonces el teorema dice que el elemento de D asignado por I a t' para s (en este caso, el j-ésimo término de s, es decir, d) es el mismo que el elemento de D asignado por I a t para s' (en este caso, el k-ésimo término de s', es decir, d).

Demostración. Se trata de una demostración por inducción sobre la longitud de t, en donde la longitud de t viene dada por el número de apariciones en t de símbolos individuales (es decir, constantes individuales o variables individuales) y símbolos funcionales.

Base: $n = 1$

Entonces t es una constante individual o una variable individual. 3 casos:

1. t es una constante

2. t es una variable v_j y $j \neq k$
3. t es una variable v_j y $j = k$

Y ya se trata de verificar mecánicamente que el teorema vale para cada uno de esos casos.

Paso de la Inducción

Supongamos que el teorema vale para todos los términos de longitud menor que q. Hay que demostrar que vale para todos los términos de longitud q.

Considerando la Base, sólo tenemos que tener en cuenta los casos en los que $n > 1$. Entonces t debe tener la forma $ft_1 \ldots t_m$ en donde f es un símbolo funcional m-ádico y $t_1, \ldots, t_m$ son términos de longitud menor que q (luego la hipótesis de la inducción se les puede aplicar). Sea f la función asignada por I a f. t′ es $ft'_1 \ldots t'_m$. Entonces $t'^*s = [ft'_1 \ldots t'_m]^*s = f(t'_1{}^*s, \ldots, t'_m{}^*s) =$ [por la hipótesis de la inducción] $f(t_1{}^*s', \ldots, t_m{}^*s') = [ft_1 \ldots t_m]^*s' = t^*s'$.

Recapitulación (secc. 38)

Si A es una fbf, t es un término, y v es una variable, entonces Av/t es la fbf que se obtiene a partir de A substituyendo todas las apariciones libres de v en A por t.

t está libre para v en A si (1) si t es una variable, entonces t aparece libre en donde quiera que v aparece libre en A, y (2) si t es un término en el que aparece cualquier variable, entonces siempre que las apariciones libres de v en A se substituyen por t, todas las apariciones de variables siguen siendo libres. Si t es un término cerrado, entonces t no está libre para v en ningún A.

40.15.[6] *Sea A una fbf, v_k una variable, t un término que está libre para v_k en A. Sea s una secuencia y sea s′ la secuencia que resulta de reemplazar el k-ésimo término de s por t*s (es decir, el elemento de D asignado por I al término t para la secuencia s): es decir, $s' = k(k/t^*s)$. Entonces s satisface A v_k/t sii s′ satisface A*

Demostración. Por inducción sobre el número de cuantificadores y conectivas de A.

Base: $n = 0$

Entonces A es un símbolo proposicional, o tiene la forma $Ft_1 \ldots t_m$. Resulta claro que el teorema vale si A es un símbolo proposicional. Sea

t_i' el resultado de sustituir por t cada aparición de v_k en t_i. Entonces s satisface Av_k/t sii $t_1'*s', \ldots, t_m'*s$ están en la relación R. s' satisface A sii $t_1*s', \ldots, t_m*s'$ están en la relación R. Por 40.14, $t_i'*s = t_i*s'$ para $1 \leqslant i \leqslant m$. Luego s satisface Av_k/t sii s' satisface A.

Paso de la Inducción

Supongamos que el teorema vale para todas las fbfs que tienen menos de q conectivas y cuantificadores. Hay que demostrar que vale para todas las fbfs que tienen q conectivas y cuantificadores. Hay 3 casos:

1. A es $\sim B$
2. A es $B \supset C$
3. A es $\wedge v_j B$

Caso 1. A es $\sim B$. Entonces Av_k/t es $\sim Bv_k/t$. s satisface luego también está libre para v_k en B. Luego, por la hipótesis de la inducción, s no satisface Bv_k/t sii s' no satisface B. Pero s' no satisface B sii s' satisface A. Luego s satisface Av_k/t sii s' satisface A.

Caso 2. A es $B \supset C$. Trivial.

Caso 3. A es $\wedge v_j B$. Entonces Av_k/t es $\wedge v_j Bv_k/t$ y t está libre para v_k en B.

(i) Supongamos que v_k está libre en A y $j \neq k$. s satisface Av_k/t sii s (j/d) satisface Bv_k/t para todo elemento d de D. Por la hipótesis de la inducción, $s(j/d)$ satisface Bv_k/t sii $s(j/d)'$ satisface B. Puesto que t está libre para v_k en B y A es $\wedge v_j B$, v_j no aparece en t. Luego $t*s$ no depende de lo que sea el j-ésimo término de s, para cualquier s. Luego, para cualquier d, s (j/d)', que es la secuencia que resulta de reemplazar el k-ésimo término de s (j/d) por $t*s$ es s'(j/d), que es la secuencia que resulta de reemplazar por $t*s$ el k-ésimo de s reemplazando a continuación el j-ésimo término de la secuencia resultante por d. s' satisface A sii $s'(j/d)$ satisface B para todo d.

Entonces tenemos:

s satisface Av_k/t sii s (j/d) satisface Bv_k/t para todo d.
s(j/d) satisface Bv_k/t sii s (j/d)' satisface B para todo d.
Para cualquier d, s(j/d)' $= s'$(j/d).
s' satisface A sii s'(j/d) satisface B para todo d.
Luego s satisface Av_k/t sii s' satisface A.

(ii) Supongamos que v_k no está libre en A. Entonces Av_k/t es A. Puesto que s' se diferencia de s en como máximo el k-ésimo término, y

v_k no es una variable libre de A, podemos aplicar 40.12, y obtener:
s satisface A sii s' satisface A
es decir, s satisface Av_k/t sii s' satisface A.

(iii) Supongamos $j=k$. Entonces v_k no está libre en A. Entonces sucede lo mismo que en el caso de (ii).

40.16 $\wedge v_k A \supset Av_k/t$ *es lógicamente válida si t está libre para* v_k *en A*

Demostración. Supongamos que s satisface $\wedge v_k$A. Entonces s(k/d) satisface A para todo d. Luego s (k/t*s) satisface A. Luego, por 40.15, s satisface Av_k/t.

40.17 *Si A es una fbf cerrada, entonces o bien A, o bien* $\sim A$, *y sólo una de las dos, es verdadera, para I y la otra es falsa para I*

Demostración. Puesto que A no tiene variables libres, dos secuencias *cualesquiera satisfacen la hipótesis de* 40.12. *Luego, por* 40.12, *una secuencia satisface A sii toda* secuencia lo hace. Luego o bien toda secuencia satisface A, o bien ninguna lo hace. Luego o bien A es verdadera para I, o bien A es falsa para I. Si A es verdadera para I, entonces ninguna secuencia satisface $\sim$A, es decir, $\sim$A es falsa para I. Si A es falsa para I, entonces $\sim$A es verdadera para I.

40.18 *Si A y B son fbfs cerradas, entonces* $A \supset$ B *es verdadera para I sii A es falsa para I o B es verdadera para I*

Demostración

(*a*) Supongamos que $A \supset B$ es verdadera para I. Entonces una secuencia cualquiera s satisface $A \supset B$. Luego s no satisface A o s satisface B. Si s no satisface A, entonces A no es verdadera para I, y por lo tanto, por 40.17, A es falsa para I. Si s satisface B, entonces B no es falsa para I, y por tanto por 40.17 B es verdadera para I.

(*b*) Supongamos que A es falsa para I o B es verdadera para I. (i) Si A es falsa para I, entonces ninguna secuencia satisface A y por lo tanto toda secuencia satisface $A \supset B$. (ii) Si B es verdadera para I, entonces toda secuencia satisface B, y por tanto toda secuencia satisface $A \supset B$. Luego en ambos casos $A \supset B$ es verdadera para I.

40.19 *Si A y B son fbfs cerradas, entonces* $A \supset B$ *es falsa para I sii A es verdadera para I y B es falsa para I*

Demostración. Si A y B son fbfs cerradas, entonces también lo es $A \supset B$. Por 40.17, $A \supset B$ es falsa para I sii $A \supset B$ no es verdadera para I, y

por 40.18, $A \supset B$ no es verdadera para I sii A no es falsa para I y B no es verdadera para I, es decir (puesto que A y B son fbfs cerradas) sii A es verdadera para I y B es falsa para I.

40.20[7] *Si una fórmula A, con sólo una variable libre v_k, es verdadera para I, entonces cada una de las fórmulas que sea el resultado de sustituir las apariciones libres de la variable por un término cerrado, es verdadera para I*

Demostración. Supongamos que A es verdadera para I. Entonces, por 40,6, su cierre $\wedge v_k A$ es verdadero para I. Por 40.16, $\wedge v_k A \supset Av_k/t$ es lógicamente válida si t es un término cerrado, luego si $\wedge v_k A$ es verdadera, entonces Av_k/t es verdadera si t es un término cerrado. Luego Av_k/t es verdadera para I para todo término cerrado t.

40.21[7] *Sea I una interpretación con dominio D. Sea A una fbf con una sola variable libre, v_k. Si I asigna cada elemento de D a algún término cerrado, y Av_k/t es verdadera para I para cada término cerrado, y Av_k/t es verdadera para I para cada término cerrado t, entonces $\wedge v_k A$ es verdadera para I*

Demostración. Supongamos que Av_k/t es verdadera para I para cada término cerrado t. Sea c un término cerrado cualquiera. Entonces Av_k/c es verdadera para I. Sea *s* una secuencia cualquiera. Entonces *s* satisface Av_k/c. Sea *s'*, $s(k/c^*s)$. Entonces, por 40.15, *s'* satisface A. Pero *s* era una secuencia cualquiera y c era un término cerrado cualquiera. Luego, puesto que *ex hipothesi* cada elemento de D está asignado a algún término cerrado, *s'* puede ser una secuencia *cualquiera.* Luego A está satisfecha por una secuencia cualquiera. Luego $\wedge v_k A$ es verdadera para I.

Para facilidad del lector repetimos aquí la definición de la *k-validez: Definición.* Una fórmula de Q es *k-válida* sii es verdadera para toda interpretación de Q que tenga un dominio de *k* elementos.

40.22[8] *Existe un método efectivo que, dada una fórmula cualquiera A de Q y un entero positivo cualquiera k, permite establecer si A es k-válido o no lo es*

Demostración informal. Para un entero positivo determinado *k* existe una infinita cantidad de diferentes interpretaciones de Q que tienen dominios de exactamente *k* elementos. Pero para determinar la k-validez de una fórmula no es necesario considerar cada una de las infinitas interpretaciones posibles de (digamos) un símbolo predicativo. Sólo hay

que tener en cuenta una cantidad finita de posibilidades diferentes que sean *relevantes* (consideramos clases de interpretaciones, y no interpretaciones determinadas). Como ilustración:

Ilustración 1

Sea la fórmula F^*x'''. Sea $k=2$. Sea I una interpretación con un dominio D de exactamente dos elementos. Llamemos a estos elementos d_1 y d_2. Entonces, por 40.12, para establecer si una secuencia enumerable cualquiera s de elementos de D satisface, o no, $F^{*\prime}x'''$, sólo tenemos que considerar si el tercer término de la secuencia s posee o no la propiedad asignada por I al símbolo predicativo $F^{*\prime}$. Los otros términos de la secuencia no hacen al caso. Luego, puesto que D sólo tiene dos elementos, d_1 y d_2, sólo hay dos casos diferentes que sean relevantes, y que son los que tenemos que tener en cuenta, esto es, el caso en el que el tercer término de s es d_1, y el caso en el que el tercer término de s es d_2. Sea s_1 término es d_1, y sea s_2 una consecuencia enumerable cualquiera cuyo tercer término es d_2. Abreviamos $F^{*\prime}x'''$ mediante Fx_3. Tenemos entonces las cuatro posibilidades siguientes:

Posibilidades

1 s_1 satisface Fx_3
  s_2 satisface Fx_3
2 s_1 no satisface Fx_3
  s_2 satisface Fx_3
3 s_1 satisface Fx_3
  s_2 no satisface Fx_3
4 s_1 no satisface Fx_3
  s_2 no satisface Fx_3

Ilustración 2

Sea la fórmula $F^{**\prime}x'x''$. Sea k otra vez 2.

En esta ocasión hay cuatro tipos diferentes de secuencia que son relevantes.

Sea s_1 una secuencia cualquiera que comienza $\langle d_1, d_1, \ldots\rangle$.
Sea s_2 una secuencia cualquiera que comienza $\langle d_1, d_2, \ldots\rangle$.
Sea s_3 una secuencia cualquiera que comienza $\langle d_2, d_2, \ldots\rangle$.
Sea s_4 una secuencia cualquiera que comienza $\langle d_2, d_1, \ldots\rangle$.

Abreviamos $F^{**\prime}x'x''$ mediante A. Entonces tenemos 16 posibilidades diferentes que sean relevantes:

	Posibilidades						
	1	2	3	4		15	16
s_1 satisface A?	Sí	No	Sí	No		Sí	No
s_2 satisface A?	Sí	Sí	No	No		No	No
s_3 satisface A?	Sí	Sí	Sí	Sí		No	No
s_4 satisface A?	Sí	Sí	Sí	Sí		No	No

Ilustración 3

Sea la fórmula $F^{**'}x'x''$, que abreviaremos mediante A. Sea $k=3$. Sea I una interpretación cualquiera con un dominio de tres elementos, d_1, d_2 y d_3.

En esta ocasión tenemos nueve tipos diferentes de secuencias que sean relevantes.

Sea s_1 una secuencia cualquiera que comience $\langle d_1, d_1, \ldots \rangle$.

s_2 $\langle d_1, d_2, \ldots \rangle$
s_3 $\langle d_1, d_3, \ldots \rangle$
s_4 $\langle d_2, d_1, \ldots \rangle$
s_5 $\langle d_2, d_2, \ldots \rangle$
s_6 $\langle d_2, d_3, \ldots \rangle$
s_7 $\langle d_3, d_1, \ldots \rangle$
s_8 $\langle d_3, d_2, \ldots \rangle$
s_9 $\langle d_3, d_3, \ldots \rangle$

Tenemos 512 $[=2^{(3^2)}]$ posibilidades:

	Posibilidades							
	1	2	3	...	...	...	511	512
s_1 satisface A?	Sí	No	Sí	...	...	...	Sí	No
s_2 satisface A?	Sí	Sí	No	...	...	...	No	No
s_3 satisface A?	Sí	Sí	Sí	...	...	...	No	No
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
s_9 satisface A?	Sí	Sí	Sí	...	...	...	No	No

Ilustración 4

Sea la fórmula $F^{**'}a'a''$, que abreviaremos mediante B. Sea $k=2$. Sea I una interpretación cualquiera con un dominio D de dos elementos, d_1 y d_2. Existen cuatro posibles asignaciones a a' y a'', esto es:

1. I asigna d, tanto a a' como a a''
2. I asigna d_1 a a' y d_2 a a''
3. I asigna d_2 tanto a a' como a a''
4. I asigna d_2 a a' y d_1 a a''

Para cada una de esas asignaciones, una secuencia cualquiera s puede satisfacer, o no satisfacer, B. Esto nos proporciona 16 posibilidades:

I asigna a:

			Posibilidades:						
a'	a''		1	2	3	...	...	15	16
d_1	d_1	s satisface B?	Sí	No	Sí	...	...	Sí	No
d_1	d_2	s satisface B?	Sí	Sí	No	...	...	No	No
d_2	d_2	s satisface B?	Sí	Sí	Sí	...	...	No	No
d_2	d_1	s satisface B?	Sí	Sí	Sí	...	...	No	No

Todo lo que tenemos que hacer para determinar si una determinada fórmula es, o no es, k-válida, para un entero positivo determinado k, es recorrer las *finitas* posibilidades distintas que surgen de la permutación de las diferentes posibilidades que resultan relevantes por las partes atómicas de la fórmula. Puesto que en cualquier caso dado el número de posibilidades es finito, siempre es posible en principio recorrerlas todas ellas, aunque, tal y como hemos visto, si k es grande o si la fórmula contiene símbolos predicativos n-ádicos siendo n grande, el número de posibilidades que hay que tener en cuenta puede que sea muy elevado.

Ejemplo 1: ¿Es 1-válida la fórmula $F^{*\prime}x' \supset \wedge x'F^{*\prime}x'$?

Sea I una interpretación cualquiera con un dominio D que tiene un único elemento, al que llamaremos d. Entonces sólo hay una secuencia enumerable s de elementos de D, esto es, la secuencia $\langle d, d, d, \ldots \rangle$. Existen sólo dos posibilidades relevantes para $F^{*\prime}x'$: o bien s la satisface, o bien no la satisface. Si s la satisface, s también satisface a $\wedge x'F^{*\prime}x'$ (puesto que s es la única secuencia enumerable de elementos de D). Si s no satisface a $F^{*\prime}x'$, entonces s no satisface a $\wedge x'F^{*\prime}x'$. Por tanto, obtenemos la siguiente tabla, en la que 'Sí' significa 's datisface' y 'No' significa 's no satisface':

$F^{*\prime}x'$	$\wedge x'F^{*\prime}x'$	$F^{*\prime}x' \supset \wedge x'F^{*\prime}x'$
Sí	Sí	Sí
No	No	Sí

Luego para una interpretación cualquiera con un dominio de sólo un elemento, toda secuencia satisface a $F^{*\prime}x' \supset \wedge x'F^{*\prime}x'$. Luego esta fórmula es 1-válida.

Ejemplo 2: ¿Es 2-válida (la fórmula) $F^{*\prime}x' \supset \wedge x'F^{*\prime}x'$?

Sea I una interpretación cualquiera con un dominio D que tiene dos elementos, a los que llamaremos d_1 y d_2. Sea s_1 una secuencia cualquiera de elementos de D cuyo primer término es d_1. Y sea s_2 una secuencia cualquiera cuyo primer término es d_2. Entonces, en el caso de $F^{*\prime}x'$ tenemos cuatro posibilidades:

1	2
s_1 satisface	s_1 no satisface
s_2 satisface	s_2 satisface
3	4
s_1 satisface	s_1 no satisface
s_2 no satisface	s_2 no satisface

Para cada una de esas cuatro posibilidades extraemos el resultado de si tanto s_1 como s_2 satisfacen o no la fórmula $F^{*\prime}x' \supset \wedge x'F^{*\prime}x'$, que abreviaremos mediante W.

Posibilidad 1: tanto s_1 como s_2 satisfacen $F^{*\prime}x'$. Entonces tanto s_1 como s_2 satisfacen $\wedge x'F^{*\prime}x'$, y por lo tanto ambas satisfacen W.

Posibilidad 2: s_1 no satisface $F^{*\prime}x'$, pero s_2 sí lo hace. Entonces ni s_1, ni s_2 satisfacen $\wedge x'F^{*\prime}x'$, y s_1 satisface W, pero s_2 no lo hace.

Esto basta para demostrar que W no es 2-válida. Pero seguiremos aunque sólo sea para completar el proceso:

Posibilidad 3: s_1 satisface $F^{*\prime}x'$ pero s_2 no lo hace. Entonces ni s_1 ni s_2 satisfacen $\wedge x'F^{*\prime}x'$, y s_2 satisface W, pero s_1 no lo hace.

Posibilidad 4: Ni s_1 ni s_2 satisfacen $F^{*\prime}x'$. Entonces ninguna de las dos satisface $\wedge x'F^{*\prime}x'$. Pero ambas satisfacen W.

Ejemplo 3: ¿Es 1-válida la fórmula $(F^{**\prime}a'a'' \supset (p' \supset \wedge x''F^{**\prime}x'x''))$?

Abreviaremos dicha fórmula mediante Z.

Sea I una interpretación cualquiera con un dominio D de un elemento, d. Entonces existe sólo una secuencia enumerable s de elementos de D, esto es, $\langle d, d, d, \ldots \rangle$.

En el caso de $F^{**\prime}x'x''$ existen dos posibilidades: (1) s la satisface, (2) s no la satisface.

En el caso de p' también hay dos posibilidades: (1) s la satisface, (2) s no lo hace.

En el caso de $F^{**\prime}a'a''$ hay las mismas dos posibilidades. Pero las posibilidades para $F^{**\prime}a'a''$ y $F^{**\prime}x'x''$ no son independientes, puesto que s satisface $F^{**\prime}a'a''$ sii satisface $F^{**\prime}x'x''$ (la interpretación I debe asignar d tanto a a' como a a'': no hay ninguna otra cosa que pueda asignar).

Esto nos proporciona cuatro posibilidades diferentes que sean relevantes:

1. s satisface $F^{**\prime}x'x''$ (y por lo tanto también $F^{**\prime}a'a''$) y también p'.
2. s satisface $F^{**\prime}x'x''$ pero no p'.
3. s no satisface $F^{**\prime}x'x''$ pero satisface p'.
4. s no satisface ni $F^{**\prime}x'x''$ ni p'.

Un cálculo mostrará que, en los cuatro casos, s satisface Z. Luego Z es 1-válido.

Ejemplo 4: ¿Es 2-válida la fórmula Z del ejemplo anterior?

Sea I una interpretación cualquiera con un dominio de dos elementos d_1 y d_2. Sean s_1, s_2, s_3, s_4 como en la anterior ilustración 2. Entonces para $F^{**\prime}x'x''$ tenemos 16 posibilidades diferentes que sean revelantes, igual que en la Ilustración 2.

Para cada una de esas 16 posibilidades yo podría hacer cuatro asignaciones posibles a a' y a'', como en la anterior Ilustración 4.

Con esto tenemos $16 \times 4 = 64$ posibilidades.

Para cada una de esas 64 posibilidades la secuencia que consideramos puede satisfacer p' o puede que no lo haga.

Con esto tenemos en total $64 \times 2 = 128$ posibilidades diferentes que sean revelantes.

Un cálculo mostrará que no toda secuencia satisface Z. Por ejemplo, consideremos la clase de interpretaciones en la que

(i) $F^{**\prime}x'x''$ es satisfecha por cualquier secuencia que comience $\langle d_1, d_1, \ldots\rangle$ pero no cualquier secuencia que comience $\langle d_1, d_2, \ldots\rangle$ y
(ii) d, se asigna tanto a a' como a a'', y
(iii) a p' se le asigna el valor de verdad V.

Sea I una interpretación de esta clase. Entonces, puesto que por (i) el par

ordenado $\langle d_1, d_1 \rangle$ tiene la propiedad que I asigna a $F^{**\prime}$, por (ii) $F^{**\prime}a'a''$ es verdadera para I. Luego cualquier secuencia satisface $F^{**\prime}a'a''$ (para la interpretación I). Además, puesto que p' es verdadera para I, cualquier secuencia satisface p' (para I). Pero por (i) cualquier secuencia que comience $\langle d_1, d_2, \ldots \rangle$ no satisface $F^{**\prime}x'x''$ y por lo tanto no satisface $\wedge x''F^{**\prime}x'x''$. Luego ninguna secuencia que comience $\langle d_1, d_2, \ldots \rangle$ satisface Z (para I). Luego Z no es 2-válida.

Repárese en el hecho de que no tenemos que tener en cuenta la naturaleza específica de d_1 o d_2, o la propiedad específica que I asigna a $F^{**\prime}$.

A partir de estos ejemplos resulta evidente que existe un método efectivo que permite establecer, para cualquier fórmula de Q, y cualquier entero positivo k, si esa fórmula es k-válida o no lo es.

Hay fórmulas que son k-válidas para todo entero positivo k pero que no son lógicamente válidas: por ej., la fórmula (en notación abreviada)

$$\sim(\wedge x \wedge y \wedge z(((Fxy \wedge Fyz) \supset Fxz) \wedge \sim Fxx) \wedge \wedge y \wedge xFxy)^1$$

Luego la existencia de un método efectivo para decidir, para cada fórmula de Q, si es, o no es, k-válida no implica la existencia de un método efectivo para decidir, para cada fórmula de Q, si es lógicamente válida o no. De hecho, no existe ningún método efectivo para decidir, para cada fórmula de Q, si es, o no, lógicamente válida; cf. secc. 57 más adelante.

EJERCICIO

1. (*a*) ¿Es 1-válida la fórmula $\sim \wedge x_1 \sim Fx_1 \supset \wedge x_1 Fx_1$ $[\wedge x_1 Fx_1 \supset \wedge x_1 Fx_1]$?
   (*b*) ¿Y es 2-válida?

RESPUESTA

1. (*a*) Sí. Sea I una interpretación cualquiera con un dominio D de un elemento, d. Entonces existe sólo una secuencia enumerable s de elementos de D, esto es, la secuencia $\langle d, d, d, \ldots \rangle$. O bien s satisface Fx, o bien no lo hace. Tomemos, por tanto, la siguiente tabla, en la que 'Sí' significa 's satisface' y 'No' significa 's no satisface':

Fx_1	$\sim Fx_1$	$\wedge x_1 \sim Fx_1$	$\sim \wedge x_1 \sim Fx_1$	$\wedge x_1 Fx_1$	$\sim \wedge x_1 \sim Fx_1 \supset \wedge x_1 Fx_1$
Sí	No	No	Sí	Sí	Sí
No	Sí	Sí	No	No	Sí

(*b*) No. Sean s_1 y s_2 como en el Ejemplo 2 de la p. 189. Abreviaremos $\sim \wedge x_1 \sim Fx_1 \supset \wedge x_1 Fx_1$ mediante Y.

Posibilidad 1: tanto s_1 como s_2 satisfacen Fx_1. Entonces ambas satisfacen $\wedge x_1 Fx_1$, y por lo tanto también *Y*.

Posibilidad 2: s_1 no satisface Fx_1, pero s_2 sí lo hace. Entonces ni s_1 ni s_2 satisfacen $\wedge x_1 Fx_1$. Puesto que s_2 satisface Fx_1, no satisface $\sim Fx_1$; por lo tanto ni s_1 ni s_2 satisfacen $\wedge x_1 \sim Fx_1$; por lo tanto ambas satisfacen $\sim \wedge x_1 \sim Fx_1$. Luego ambas satisfacen $\sim \wedge x_1 \sim Fx_1$ y ninguna de ellas satisface $\wedge x_1 Fx_1$. Luego ninguna de ellas satisface Y. Luego Y no es 2-válida. No hace falta considerar las demás posibilidades.

41. Un mecanismo deductivo para Q: El sistema formal SQ. Definiciones de demostración en SQ, teorema de SQ, derivación en SQ, consecuencia sintáctica en SQ, conjunto consistente (desde el punto de vista de la teoría de la demostración) de SQ

Considérese esta sección como si siguiera directamente al final de la secc. 38 y como si no conociéramos nada acerca de ninguna semántica de Q.

El sistema SQ

Axiomas[10]

Sean A, B, C fórmulas cualesquiera de Q (no necesariamente distintas), sea v cualquier variable individual y t cualquier término. Si A es una fbf, entonces Av/t es una fbf obtenida a partir de A substituyendo todas las apariciones libres de v en A por t. Entonces las siguientes fórmulas son axiomas:

[SQ 1] $(A \supset (B \supset A))$

[SQ 2] $((A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

[QS 3] $((\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A))$

[SQ 4] $\wedge vA \supset Av/t$ si t está libre para v en A [es decir, si (1) si t es una variable, entonces t aparece libre en Av/t en los lugares en que v aparecía libre en A, y (2) si t es un término en aparecen variables cualesquiera, entonces en todas las posiciones en las que las apariciones libres de v en A se substituían por t, todas las apariciones de variables en t siguen estando libres. Si t es un término cerrado, t está libre para v en A.]

[SQ 5] $(A \supset \wedge vA)$ si v no aparece libre en A
[SQ 6] $(\wedge v(A \supset B) \supset (\wedge vA \supset \wedge vB))$

Además:

[SQ 7] Si A es un axioma, entonces $\wedge vA$ también es un axioma.

La razón de la restricción a la que se ve sometida SQ 4 es que deseamos que todos nuestros axiomas sean lógicamente válidos, y sin esa restricción tendríamos como axioma, por ejemplo, la siguiente fórmula:

$$\wedge x_1 \sim \wedge x_2 F x_1 x_2 \supset \sim \wedge x_2 F x_2 x_2$$

Esta fórmula no es lógicamente válida ('F' signifique '=' y tenga D por lo menos dos elementos. Entonces el antecedente es verdadero y el consecuente falso.)

La razón de la restricción a la que se ve sometido SQ 5 es que sin ella tendríamos como axioma, por ejemplo, la siguiente fórmula:

$$F x_1 \supset \wedge x_1 F x_1$$

Esta fórmula no es lógicamente válida. (Tenemos D como el conjunto de los números naturales y 'F' como 'es par'. Entonces la secuencia $\langle 2, 2, 2, 2, \ldots \rangle$, por ejemplo, no satisface esa fórmula.)

Regla de inferencia

Si A y B son fbfs, entonces B es una consecuencia inmediata de A y $(A \supset B)$.

[Modus Ponens para $\supset$]

Definición. Una demostración en SQ es una cadena finita de fórmulas de Q, cada una de las cuales es un axioma de SQ, o una consecuencia inmediata, en virtud de la regla de inferencia, de dos fórmulas que le precedan en la cadena.

Definición. Una fórmula A de Q es un *teorema de SQ* $[\vdash_{QS} A]$ sii existe alguna demostración en SQ cuya última fórmula sea A.

Definición. Una cadena de fórmulas es una *derivación en SQ* de una fbf. A partir de un conjunto Γ de fbfs de Q sii (1) es una cadena finita (pero no vacía) de fórmulas de Q, (2) la última fórmula de la cadena es A, y (3) cada fórmula de la cadena es (i) un axioma de SQ o (ii) una consecuencia inmediata, en virtud de la regla de inferencia de SQ, de dos fórmulas que le precedan en la cadena, o (iii) un elemento del conjunto Γ.

Definición. Una fórmula A es una *consecuencia sintáctica en SQ* de un conjunto Γ de fórmulas de Q [$\Gamma \vdash_{QS} A$] sii existe una derivación en SQ de A a partir del conjunto.

Definición. Un conjunto Γ de fórmulas de Q es un *conjunto consistente de SQ desde el punto de vista de la teoría de la demostración* sii para ninguna fórmula A de Q sucede que a la vez $\Gamma \vdash_{SQ} A$ y $\Gamma \vdash_{SQ} \sim A$.

Abreviaremos 'conjunto consistente desde el punto de vista de la teoría de la demostración' mediante 'conjunto consistente', ya que no haremos uso de la frase conjunto consistente [de Q] desde el punto de vista de la teoría de modelos'. [A veces diremos que un conjunto *tiene un modelo*, o de que *es simultáneamente satisfacible*, pero éstas son nociones diferentes.]

Un conjunto Γ de fórmulas de Q es un *conjunto inconsistente de SQ* sii para alguna fórmula A de Q sucede que $\Gamma \vdash_{SQ} A$ y $\Gamma \vdash_{SQ} \sim A$.

42. Demostración de la consistencia de SQ

42.1. *SQ es consistente*

Demostración. Sea A cualquier fbf de Q. Definiremos su fórmula proposicional asociada, A^{prop}, de la siguiente manera: Borramos todos los cuantificadores de A; borramos todos los términos de A; reemplazamos cada símbolo predicativo por el símbolo proposicional *p'*. A^{prop} es una fbf del lenguaje P.

Si A es un axioma de SQ en virtud de uno de los esquemas axiomáticos SQ1, SQ2, SQ3, entonces A^{prop} será un axioma de SP en virtud de uno de los esquemas axiomáticos [de SP] SP1, SP2, SP3. Si A es un axioma de SQ en virtud de SQ4, SQ5 o SQ6, entonces A^{prop} será un teorema de SP que tendrá la forma $(B \supset B)$. Si A es un axioma de SQ en virtud del esquema axiomático SQ7, entonces A^{prop} será o bien un axioma de SP, o bien un teorema de SP de la forma $(B \supset B)$.

Si B es una consecuencia inmediata, en virtud de la regla de inferencia de SQ, de A y $(A \supset B)$, entonces B^{prop} será una consecuencia inmediata, en virtud de la regla de inferencia de SP, de A^{prop} y $(A \supset B)^{prop}$, ya que $(A \supset B)^{prop}$ es $A^{prop} \supset B^{prop}$.

Supongamos ahora que SQ no es consistente (que SQ es inconsistente). Entonces, para alguna fbf A de Q existe una demostración en SQ de A y también una demostración en SQ de $\sim A$. Sustituimos en estas

demostraciones cada fbf por su fórmula proposicional asociada. Tendremos como resultado dos cadenas de fbfs de P. Si una cualquiera de estas cadenas no es una demostración en SP, será porque en algún lugar de la cadena aparece una fbf de la forma $(B \supset B)$ que no es una consecuencia inmediata en SP de fbfs que la precedan en la cadena. Añadamos tales fbfs (sabemos que podemos hacerlo, puesto que $(B \supset B)$ es un esquema de teorema de SP); obtendremos como resultado unas demostraciones en SP de A^{prop} y $\sim A^{prop}$, en donde $\sim A^{prop}$ es la negación de A^{prop}.

Luego tenemos que: Si SQ no es consistente, tampoco lo es SP.

Pero SP es consistente. Luego SQ también lo es.

Una variante de la demostración: Cualquier teorema de SQ tendrá como fórmula proposicional asociada una tautología de P (cualquier axioma de SQ tiene como f.p.a. una tautología de P, y el Modus Ponens en SQ preserva la tautologicidad de las fórmulas proposicionales asociadas). Tenemos que $F^*{}'x'$ es una fbf de Q que no tiene como f.p.a. una tautología de P. Por lo tanto no es un teorema de SQ. Por lo tanto, SQ es consistente.

Otra demostración de la consistencia de SQ puede obtenerse utilizando 43.5: Si $\vdash_{SQ} A$, entonces $\nvdash_{Q} A$. (Sin embargo, existe un sentido de 'finitista' en el cual las anteriores demostraciones de consistencia son finitistas, en tanto que la demostración de 32.5 no lo es: ver además Kleene (1952, pp. 174-5).]

43. Algunos metateoremas acerca de SQ

Sólo desarrollaremos aquí la parte de la metateoría de SQ de la que tendremos necesidad en demostraciones posteriores.

43.1 *El Teorema de Deducción vale para SQ*

Demostración. En virtud de nuestro análisis de la demostración del Teorema de Deducción para SP, al final de la secc. 26. el TD vale para cualquier sistema que tenga las tres propiedades siguientes:

43.1 *El Teorema de Deducción vale para SQ*

Demostración. En virtud de nuestro análisis de la demostración del Teorema de Deducción para SP, al final de la secc. 26. el TD vale para cualquier sistema que tenga las tres propiedades siguientes:

1. Cualquier fbf de la forma $A \supset (B \supset A)$ es un teorema.

2. Cualquier fbf de la forma $A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ es un teorema.

3. El Modus Ponens para $\supset$ es la única regla de inferencia.

SQ tiene estas tres propiedades (1 por SQ1, y 2 por SQ2).

43.2 (*Teorema converso al Teorema de Deducción, que se utilizará en la 4.ª parte*) *Si* $\Gamma \vdash_{SQ} A \supset B$ *entonces* $\Gamma, A \vdash_{SQ} B$

Demostración. Supongamos $\Gamma \vdash_{SQ} A \supset B$. Entonces $\Gamma, A \vdash_{SQ} A \supset B$. Pero $\Gamma, A \vdash_{SQ} A$. Luego, por Modus Ponens, $\Gamma, A \vdash_{SQ} B$.

43.3 *Si* Δ *es un conjunto de fbfs cerradas, entonces si* $\Delta \vdash_{SQ} A$ *entonces* $\Delta \vdash_{SQ} \wedge vA$

Demostración. Vamos a mostrar que, dada una derivación de A a partir de Δ, existe una derivación de $\wedge$vA a partir de Δ. La demostración será por inducción sobre la longitud, *n*, de la derivación de A a partir de Δ.

Base: $n = 1$

Entonces A es un axioma o está en Δ. Si A es un axioma, entonces $\wedge$vA también es un axioma, por SQ7, y por lo tanto la derivación que se requiere consta simplemente de la fórmula $\wedge$vA, y sólo de ella. Si A está en Δ, entonces la cadena siguiente es una derivación de $\wedge$vA a partir de Δ:

A
$A \supset \wedge vA$ [SQ5. Puesto que A es cerrada, y no aparece libre en A]
$\wedge vA$

Paso de la Inducción

Supongamos que el teorema vale para todas las derivaciones de A a partir de Δ que tengan una longitud menor de *k*. Hay que demostrar que vale para todas las derivaciones que tengan una longitud *k*. Hay 3 casos:

1. A es un axioma.
2. A está en Δ.
3. A es una consecuencia inmediata, por MP, de dos fórmulas que le preceden.

Los *Casos* 1 *y* 2 son igual que en la Base.

Caso 3. A es una consecuencia inmediata, por MP, de dos fórmulas que le preceden en la derivación $A_1, \ldots, A_k$ de A a partir de Δ (A_k es

A). Sean esas dos fórmulas A_i y A_j, en donde $i<k$ y $j<k$ y A_j es $A_i \supset A$. Entonces, por la hipótesis de la inducción, existen derivaciones de $\wedge vA$ y $\wedge v(A_i \supset A)$ a partir de Δ. Por SQ6 $\vdash_{QS} \wedge v(A_i \supset A) \supset (\wedge vA_i \supset \wedge vA)$. Luego, por dos aplicaciones del Modus Ponens tenemos $\Delta \vdash_{SQ} \wedge vA$.

Recapitulación: Si A es una tautología de P cuyos únicos símbolos proposicionales son $P_1, \ldots, P_n$ entonces el resultado de sustituir en A $P_1, \ldots, P_n$ respectivamente por las fbfs $Q, \ldots, Q_n$ de Q es una *instancia de un esquema tautológico de Q*.

43.4. *Si A es una instancia de un esquema tautológico de Q, entonces* $\vdash_{SQ} A$

Demostración. Supongamos que A es una instancia de un esquema tautológico de Q. Sea B una tautología de P de la que A es una instancia de sustitución. Entonces hay en SP una demostración de B (por el teorema de completud semántica de SP). Puesto que A es el resultado de sustituir los símbolos proposicionales de B por fbfs de Q, hacemos esas mismas sustituciones a lo largo de la demostración de B. Mediante esta sustitución los axiomas de SP por SP1-3 se convierten en axiomas de SQ por SQ1-3, y los usos del Modus Ponens en SP se convierten en usos del Modus Ponens en SQ. Obtenemos así una demostración de A en SQ.

43.5. *Si* $\vdash_{SQ} A$ *entonces* $\models_Q A$ [*es decir, todo axioma de SQ es lógicamente válido*]

Demostración. Por 40.10, toda fórmula que sea un axioma en virtud de cualquiera de los esquemas de axioma SQ1-3 es lógicamente válida. Por 40.16, todo axioma por SQ4 es lógicamente válido. Por 40.13 todo axioma por SQ5 es lógicamente válido. Por 40.11, todo axioma por SQ6 es lógicamente válido. Luego toda fórmula que sea un axioma en virtud de cualquiera de los esquemas de axioma SQ1-6 es lógicamente válida. Luego por 40.6 todo axioma por SQ7 aplicado a cualquier axioma por SQ1-6 es lógicamente válido. Luego, de nuevo por 40.6, cualquier axioma por SQ7 es lógicamente válido. Luego todo axioma de SQ es lógicamente válido. Por 40.4, el Modus Ponens preserva la validez lógica. Luego todo teorema de SQ es lógicamente válido.

Este resultado nos proporciona otra demostración de la consistencia de SQ [*p'* es una fbf de Q que no es lógicamente válida, luego no es un teorema. Luego SQ es consistente].

43.6. *Si* $\Gamma \vdash_{SQ} A$ *entonces existe un subconjunto finito* Δ *de* Γ *tal que* $\Delta \vdash_{SQ} A$

Esto se sigue de nuestra exigencia de que una derivación en SQ debe ser una cadena *finita* de fórmulas.

43.7. *Si* $\Gamma \vdash_{SQ} A$, *entonces* $\Gamma \models_{Q} A$

Demostración. Supongamos que $\Gamma \vdash_{SQ} A$. Entonces, por 43.6, existe un subconjunto finito Δ de Γ tal que $\Delta \vdash_{SQ} A$. (i) si Δ está vacío, entonces $\vdash_{SQ} A$, y por lo tanto, por 43.5, $\models_{Q} A$ y, por lo tanto, $\Gamma \models_{Q} A$. (ii) Si Δ no está Luego, por el TD, aplicado tantas veces como sea necesario

$$\vdash_{QS} A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots, (A_n \supset A) \ldots,)).$$

Luego por 43.5, $\models_{Q} A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots, (A_n \supset A) \ldots,))$. Luego no existe ninguna secuencia que satisfaga $\{A_1, \ldots, A_n\}$ y que no satisfaga también A, es decir, no existe ninguna secuencia que satisfaga a todo elemento de Δ y que no satisfaga también A. Puesto que Δ es un subconjunto de Γ, se sigue que no existe ninguna secuencia que satisfaga a todo elemento de Γ y que no satisfaga también A; es decir: $\Gamma \models_{Q} A$.

43.8. *Si* $A \vdash_{SQ} B$ *entonces* $\models_{Q} A \supset B$

Demostración. Supongamos $A \vdash_{SQ} B$. Entonces por el TD, $\vdash_{SQ} A \supset B$. Entonces por 43.5, $\models_{Q} A \supset B$.

43.9. *Si* $\Gamma \cup \{\sim A\}$ *no es un conjunto consistente de SQ, entonces* $\Gamma \vdash_{SQ} A$

Demostración. Supongamos que $\Gamma \cup \{\sim A\}$ es un conjunto inconsistente de SQ. Entonces $\Gamma, \sim A \vdash_{SQ} B$ y $\Gamma, \sim A \vdash_{SQ} \sim B$ para alguna fórmula B. Luego, por el TD, $\Gamma \vdash_{SQ} \sim A \supset B$ y $\Gamma \vdash_{SQ} \sim A \supset \sim B$. Pero $\vdash_{SQ} (\sim A \supset B) \supset ((\sim A \supset \sim B) \supset A)$ (que es una instancia de un esquema tautológico). Luego, por MP dos veces $\Gamma \vdash_{SQ} A$.

En la sección siguiente (secc. 44) definimos la noción de *teoría de primer orden*, y en la larga sección que sigue a ésta (secc. 45) demostramos diversos metateoremas acerca de teorías cualesquiera de primer orden. A través de las teorías de primer orden la lógica moderna encuentra la mayor parte de sus aplicaciones. Por ejemplo, la teoría de conjuntos puede presentarse como una teoría de primer orden interpretada, y prácticamente toda (¿toda?) la matemática pura puede expresarse en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Pero nosotros nos interesamos por las teorías de primer orden por una razón diferente. Nuestro objetivo principal es demostrar el Teorema 45.15, *Cualquier teoría consistente de primer orden tiene un modelo enumerable*, a partir del cual se sigue la

completud semántica de SQ mediante un argumentò corto y sencillo. De hecho, el Teorema 45.15 es el teorema clave de esta parte del libro. Su demostración es larga y a veces penosa, pero tiene consevuencias tan interesantes que las penas se dan por bien sufridas.

44. Teorías de primer orden

Una teoría de primer orden es un sistema formal que satisface las condiciones siguientes:

1. Su lenguaje es Q o Q^+ (Q^+ es Q con la adición de una cantidad enumerable de constantes individuales nuevas, dándose una enumeración efectiva de las constantes añadidas), salvo en que algunos o todos los símbolos proposicionales, los símbolos funcionales y las constantes individuales pueden estar ausentes, y lo mismo puede suceder con algunos, pero no todos, los símbolos predicativos.
2. Sus *axiomas lógicos* se especifican mediante los esquemas SQ1-7 aplicados a las fbfs de su lenguaje, reformulando SQ7 de la siguiente forma: 'Si A es un axioma *lógico*, entonces $\wedge$ vA también es un axioma *lógico*'.
3. Puede tener además una cantidad enumerable de *axiomas específicos*, que tienen que ser fbfs *cerradas* de su lenguaje.
4. El Modus Ponens para $\supset$ es su única regla de inferencia.

De esta definición se sigue que el mismo SQ es una teoría de primer orden.

Sea K una teoría cualquiera de primer orden. Entonces las definiciones de *demostración en K*, *teorema de K*, *derivación en K*, *consecuencia sintáctica en K*, *conjunto consistente de K* son exactamente iguales que las de SQ, sustituyendo en aquellas definiciones 'SQ' y 'Q' por 'K'. (Una fórmula de K es una fórmula del lenguaje de K.)

Un *modelo* de una teoría K de primer orden es un modelo del conjunto de los teoremas de K.

45. Algunos metateoremas acerca de teorías cualesquiera de primer orden. Completud respecto de la negación. Teorías cerradas de primer orden. El Teorema de Löwenheim-Skolem. El Teorema de Compacidad

A lo largo de esta sección, K será una teoría cualquiera de primer orden. N. B. Todos los axiomas específicos de K son fbfs *cerradas*.

45.1 *El teorema de Deducción vale para una teoría cualquiera de primer orden*

Demostración. Una teoría cualquiera de primer orden tiene las tres propiedades mencionadas al final de la secc. 26. Cf. 43.1.

45.2 *El converso del Teorema de Deducción vale para una teoría cualquiera de primer orden*

Demostración Supongamos $\Gamma \vdash_K A \supset B$. Entonces $\Gamma, A \vdash_K A \supset B$. Pero $\Gamma, A \vdash_K A$. Luego, por Modus Ponens, $\Gamma, A \vdash_K B$.

$j < k$, y A_j es $A_i \supset A$. Entonces, por la hipótesis de la inducción, $\vdash_K \wedge vA$ y $\vdash_K \wedge v(A_i \supset A)$. Por K6 $\vdash_K \wedge v(A_i \supset A)(\wedge vA_i \supset \wedge vA)$. Luego, por MP dos veces $\vdash_K \wedge vA$.

45.3. *Sea K una teoría cualquiera de primer orden. Cualquier instancia, en el lenguaje de K, de un esquema tautológico es un teorema de K*

Demostración. Igual que para 43.4, sustituyendo 'SQ' y 'Q' por 'K'.

45.4. *Si* $\vdash_K A$, *entonces* $\vdash_K \wedge vA$

Demostración: Por inducción sobre la longitud, *n*, de una demostración de A en K.

Base: $n = 1$

Entonces A es o un axioma lógico de K o un axioma específico de K. Si es un axioma lógico de K, entonces $\wedge vA$ también es un axioma lógico de K, por K7. Si es un axioma específico de K, entonces $\wedge vA$ es un teorema de K, en virtud de los pasos

A
$A \supset \wedge vA$ [K5: A es cerrada]
$\wedge vA$

Paso de la Inducción

Supongamos que el teorema vale para todas las demostraciones de longitud menor de *k*. Hay que demostrar que vale todas las demostraciones que tengan una longitud *k*. Hay dos casos:

1. A es un axioma.
2. A es una consecuencia inmediata, por MP, de dos fbfs que la preceden.

Caso 1. Igual que en la Base.

Caso 2. Sea $A_1 \cdots A_n$ una demostración de A en K (luego A_k es A. A es una consecuencia inmediata, por MP, de A_i y A_j, en donde $i < k$ y $j < k$, y A_j es $A_i \supset A$. Entonces, por la hipótesis de la inducción, $\vdash_K \wedge$ - v A y $\vdash_K \wedge$ v$(A_i \supset A)$. Por K6 $\vdash_K \wedge$ v$(A_i \supset A) \supset (\wedge$ v$A_i \supset \wedge$ v A). Luego, por MP dos veces $\vdash_K \wedge$ v A.

45.5. $\vdash_K A$ *sii* $\vdash_K A^c$

Demostración. Supongamos $\vdash_K$ A. Entonces, por 45.4, $\vdash_K \wedge$ v A para un v cualquiera. Luego, utilizando 45.4 tantas veces como sea necesario, $\vdash_K A^c$. Y a la inversa, supongamos $\vdash_K A^c$. Entonces, utilizando K4 en la forma $\wedge$ v $A \supset A$ tantas veces como sea necesario, tenemos $\vdash_K$ A.

Notación

Sea K una teoría cualquiera de primer orden. Sea A una fbf de K. Entonces $K + \{A\}$ ha de ser el sistema que resulta de añadir A a K como un axioma adicional [no hay que entender en este caso 'añadir' y 'adicional' como excluyendo el caso en el que A ya es un axioma de K].

45.6. (*a*) *Si A es una fbf cerrada de K que no es un teorema de K, entonces* $K + \{\sim A\}$ *es una teoría consistente de primer orden*

Demostración. Abreviaremos $K + \{\sim A\}$ mediante K'. Puesto que K es una teoría de primer orden y $\sim$A es cerrada, K' es una teoría de primer orden; y resulta evidente que $\vdash_{K'} B$ sii $\sim A \vdash_K B$, para cualquier fbf B. Supongamos ahora que K' es inconsistente. Entonces $\vdash_{K'} C$ y $\vdash_{K'} \sim C$ para alguna fbf C. Por lo tanto, $\sim A \vdash_K C$ y $\sim A \vdash_K \sim C$. Por lo tanto, por el Teorema de Deducción, $\vdash_K \sim A \supset C$ y $\vdash_K \sim A \supset \sim C$. Pero $\vdash_K (\sim A \supset C) \supset ((\sim A \supset \sim C) \supset A)$. Por lo tanto, por MP dos veces, $\vdash_K$ A. Pero esto contradice nuestra hipótesis de que A no era un teorema de K.

45.6. (*b*) Igual que para (*a*), pero intercambiando A y $\sim$A. La demostración utilizará $\vdash_K (A \supset C) \supset ((A \supset \sim C) \supset \sim A)$.

45.7. (*a*) (Versión alternativa de 45.6 (*a*)) *Si A es una fbf cerrada de K que no es un teorema de K, entonces* $\{\sim A\}$ *es un conjunto consistente de K*

Demostración. Supongamos que $\{\sim A\}$ es un conjunto inconsistente

de K. Entonces $\sim A \vdash_K C$ y $\sim A \vdash_K \sim C$ para algún C. El resto de la demostración es igual que en el caso de 45.6 (*a*).

45.7 (*b*) Igual que para 45.7 (*a*), pero intercambiando A y $\sim A$

45.8 *Si una teoría de primer orden tiene un modelo, entonces es consistente*

Demostración. Sea K una teoría cualquiera de primer orden. Supongamos que K tiene un modelo M. Y supongamos que K es inconsistente. Entonces $\vdash_K A$ y $\vdash_K \sim A$ para alguna fórmula A. Entonces A es verdadera para M y $\sim A$ es verdadera para M. Pero esto es imposible. Luego si K tiene un modelo, K es consistente.

45.9 *Para cualquier teoría K de primer orden hay enumeraciones efectivas de*

1. *Las fbfs de K*
2. *Las fbfs cerradas de K*
3. *Las fbfs de K en las que aparece una sola variable libre*
4. *Los términos cerrados de K*

Demostración

A. Supongamos que K tiene el lenguaje Q. Asignamos numerales a los símbolos de Q de la forma siguiente:

p	10
′	100
x	1000
a	10000
f	100000
F	1000000
*	10000000
$\sim$	100000000
$\supset$	1000000000
$\wedge$	10000000000
(	100000000000
)	1000000000000

1. El resto de la demostración es exactamente igual que la demostración del Teorema de Enumeración para fbfs del lenguaje P. Sea E la enumeración resultante de las fbfs de Q.

2. Borremos de E todas las fbfs en las que aparece alguna variable libre.

3. Borremos de E todas aquellas fbfs que no sean las fbfs en las que sólo aparece una variable libre.

4. Igual que en el caso 1, pero haciendo una lista de todos los términos cerrados, en vez de hacerla de las fbfs.

B. Supongamos que K tiene el lenguaje Q^+. Asignemos el numeral 10000000000000, es decir, '1' seguido de 13 ceros, a la primera constante nueva de la enumeración efectiva dada de las nuevas constantes. A la segunda constante de la enumeración le asignaremos el numeral compuesto por '1' seguido de 14 ceros. A la tercera, el numeral compuesto por '1' seguido de 15 ceros. Y así sucesivamente. El resto de la demostración es igual que en el caso de A.

Definición. Un sistema S' es una *extensión* de un sistema S sii todo teorema de S es un teorema de S'. N.B. Si S' es una extensión de S, entonces todo modelo de S' es un modelo de S.

Definición. Un sistema S es *completo respecto de la negación* sii para toda *oración* [fbf cerrada] A de S, o bien A, o bien la negación de A, es un teorema de S.

45.10. (*Lema de Lindenbaum para teorías de primer orden*) *Si K es una teoría consistente de primer orden, entonces existe una teoría K' de primer orden que es una extensión de K consistente y completa respecto de la negación, y que tiene las mismas fórmulas que K*

Demostración. Sea K una teoría consistente de primer orden. Por 45.9, existe una enumeración de las fbfs cerradas de K. Sea $\langle C_1, C_2, C_3, \ldots \rangle$ dicha enumeración. Definiremos de la forma siguiente una secuencia infinita $\langle K_0, K_1, K_2, \ldots \rangle$ de teorías de primer orden:

> K_0 será K. Si $\sim C_{n+1}$ no es un teorema de K_n, entonces K_{n+1} tiene que ser $K_n + \{C_{n+1}\}$ [es decir, K_n con C_{n+1} añadido como axioma]. Si $\sim C_{n+1}$ es un teorema de K_n, entonces K_{n+1} tiene que ser K_n. [Es decir, si C_{n+1} puede añadirse a K_n manteniendo la consistencia, se le añade a K_n para formar K_{n+1}. Si no puede hacerse, K_{n+1} será K_n.]

Sea K_∞ el sistema que resulta de tomar como axiomas todos los axiomas de todos los K_i. Resulta evidente que K_∞ es una extensión de K con las mismas fórmulas que K, y que también es una teoría de primer orden. Vamos a mostrar que es consistente y completo respecto de la negación.

K_ω es consistente

1. Cada uno de los K_i es consistente, ya que K_0 es *ex hypothesi* una teoría consistente de primer orden, y K_1 o bien es K_2 o, por 45.6 (*b*), es una teoría consistente de primer orden. Luego K_1 es una teoría consistente de primer orden. De igual manera, K_2 es una teoría consistente de primer orden. Y así sucesivamente.

2. K_ω es consistente. Ya que supongamos que no lo sea. Entonces habría una demostración en K_ω de A y una demostración en K_ω de $\sim$A, para alguna fórmula A. Cada una de estas demostraciones sólo tiene un número finito de fórmulas, y por lo tanto sólo utiliza un número finito de las fbfs cerradas que fueron añadidas como axiomas a K para constituir K_ω. Cada una de esas fbfs cerradas tiene asignado un número de nuestra enumeración. Sea C_n la fbf cerrada, utilizada como axioma, que tiene el número más alto en ambas demostraciones. Entonces existe una demostración en K_n de A y una demostración en K_n de $\sim$A; es decir, K_n es inconsistente. Pero esto contradice el anterior punto 1. Luego L_ω es consistente.

K_ω es completo respecto de la negación

Sea C_m la *m*-ésima fbf cerrada de nuestra enumeración. Entonces o bien $\sim C_m$ es un teorema de K_{m-1} (y por lo tanto de K_ω) o bien C_m es un teorema de K_m (y por lo tanto de K_ω). Esto vale para cada entero positivo *m*, y por lo tanto, para cada fbf cerrada de K.

Repárese en que aunque la enumeración de las fbfs cerradas de K es efectiva, veremos más adelante (4.ª Parte) que no existe ningún método efectivo que permita establecer, para cualesquiera fbfs cerradas de Q (o Q^+), si son, o no son, derivables en SQ a partir de conjuntos cualesquiera de fbfs de Q (o Q^+). Luego nuestra definición de K_ω no nos proporciona un método efectivo para establecer si una fórmula es un axioma de K_ω, o si no lo es. El conjunto de los axiomas de K_ω podría no ser decidible. Por esta razón no exigimos que, por definición, un sistema formal haya de tener un conjunto decidible de demostraciones (p.).

45.11. *Si K es una teoría consistente de primer orden, entonces el sistema que resulta de añadir a K un conjunto enumerable de nuevas constantes individuales, con una enumeración efectiva de dichas constantes, es una teoría consistente de primer orden que constituye una extensión de K*

Demostración. Sea K′ el sistema que contiene las constantes añadidas. K tiene como máximo un conjunto efectivamente enumerable de constantes individuales que no están en Q. K′ tiene un conjunto efectivamente enumerable de constantes individuales que no están en K. La unión de dos conjuntos efectivamente enumerables sigue siendo un conjunto efectivamente enumerable (tomando elementos alternativamente de cada conjunto). Luego cualquier constante individual que esté en pero que no esté en Q es efectivamente enumerable. Los axiomas lógicos de K′ vienen definidos por los esquemas K′ 1 – 7. K′ tiene exactamente los mismos axiomas específicos que K (al añadir nuevas constantes se añaden nuevos axiomas lógicos, pero no nuevos axiomas específicos). Luego, puesto que K es una teoría de primer orden, K′ también lo es. Obviamente, K′ es una extensión de K. Queda por demostrar que K′ sea consistente.

Supongamos que K′ es inconsistente. Entonces para la fórmula A existe una demostración en K′ de A y también una demostración en K′ de $\sim$A. Cada una de estas demostraciones consta de una cantidad finita de fórmulas y por lo tanto utiliza sólo una cantidad finita de las nuevas constantes (y asimismo una cantidad finita de variables). Sean $b_1 \ldots, b_n$ todas las nuevas constantes distintas que aparecen en dichas demostraciones. Sean $u_1 \cdots u_n$ variables distintas que no aparecen en ninguna de las dos demostraciones. Mostraremos que la cadena de fórmulas que resulta de reemplazar $b_1 \cdots b_n$ respectivamente por $u_1 \cdots u_n$ a lo largo de las demostraciones, constituirán demostraciones en K de Ab_i/u_i y de $\sim Ab_i/u_i$, en donde Ab_i/u_i es el resultado de reemplazar cada nueva constante que aparece en A por su correspondiente variable de la lista $u_1 \cdots u_n$. Luego si K′ es inconsistente, K también lo es. Pero K es consistente *ex hypothesi*. Luego es consistente.

Sea $A_1 \cdots A_k$ una demostración en K′ de A (luego A_k es A). Sea $A'_1 \cdots A'_k$ el resultado de reemplazar las nuevas constantes de $A_1 \cdots A_k$ por variables de la lista $u_1 \cdots u_k$, tal y como se ha explicado en el párrafo anterior. Queremos mostrar que $A'_1 \cdots A'_k$ es una demostración en K de A′, es decir, de Ab_i/u_i. Tenemos que para cada A_i hay tres posibilidades:

Caso 1. A_i es un axioma de K′ en virtud de alguno de los esquemas de axioma K′ 1 – 7. Todo lo que sea un axioma en virtud de cualquiera de los esquemas K′ 1 – 7, y contenga una o más de las nuevas constantes será un axioma de K si las nuevas constantes distintas se reemplazan por variables distintas que no aparezcan en ningún otro lugar del axioma. Así, A'_i será un axioma de K.

Caso 2. A_i es un axioma específico de K'. K' no tiene otros axiomas específicos que los de K. Luego A_i es un axioma específico de K, y por lo tanto no contiene ninguna constante nueva. Luego A'_i es A_i, un axioma específico de K.

Caso 3. A_i es una consecuencia inmediata, por Modus Ponens, de dos fórmulas A_j y $A_j \supset A$ que la preceden en la demostración. Entonces A'_j será una consecuencia inmediata por Modus Ponens de A'_j y $(A_j \supset A_i)'$, puesto que $(A_j \supset A_i)'$ es simplemente $(A'_j \supset A'_i)$.

Luego si $A_1 \cdots A_k$ es una demostración en K' de A, $A'_1 \cdots A'_k$ es una demostración en K de Ab_i/u_i.

Mediante un argumento exactamente igual se demuestra que si existe una demostración en K' de $\sim A$, entonces existe una demostración en K de Ab_i/u_i.

45.12 *Sea $\wedge vA$ una fbf cerrada de K, y sea c una constante de K que no aparece en ningún axioma específico de K en A. K' es el sistema que resulta de añadir $Av/c \supset \wedge vA$ a K como un axioma específico. Si K es una teoría consistente de primer orden, entonces K' es una teoría consistente de primer orden que constituye una extensión de K*

Demostración. Es obvio que K' es una teoría de primer orden y que es una extensión de K. Supongamos ahora que K' es inconsistente. Puesto que $\wedge vA$ es una fbf cerrada, $\wedge v/c \supset \wedge vA$ también será una fbf cerrada, y por tanto, por 45.6 (*b*), $\vdash_K \sim(Av/c \supset \wedge vZ)$. Por 45.3, $\vdash_K \sim(Av/c \supset \wedge vA) \supset Av/c$ y $\vdash_K \sim(Av/c \supset \wedge vA) \supset \sim \wedge vA$. Luego, por MP, $\vdash_K Av/c$ y $\vdash_K \sim \wedge vA$. Sea $B_1 \cdots B_m$ una demostración en K de Av/c, y sea u una variable que no aparece en esta demostración ni en A. Sea $B'_1 \cdots B'_m$ el resultado de substituir u por c a lo largo de esta demostración. Entonces $B'_1 \cdots B'_m$ también es una demostración en K; ya que, para cada B_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, (1) si B_i (en el que, por la definición de u, no aparece u) es un axioma lógico de K, entonces B'_i será también un axioma lógico de K, y (2) si B_i es un axioma específico de K, entonces B'_i será el mismo B_i, puesto que c, por definición, no aparece en ningún axioma específico de K, y (3) si B_i es una consecuencia inmediata por MP de dos fórmulas B_j y $B_j \supset B_i$, entonces B'_i será una consecuencia inmediata por MP de B'_j y $(B_j \supset B_i)'$, puesto que $(B_j \supset B_i)'$ es $(B'_j \supset B'_i)$. Luego existe una demostración en K de B'_m, que es la fórmula que resulta de substituir u por c en Av/c. Pero c, por definición, no aparece en A. Luego B_m' es Av/u. Luego $\vdash_K Av/u$. Luego, por 45.4, $\vdash_K \wedge uAv/u$.

Ahora v está libre para u en Av/u, puesto que u, por definición, no aparece en A, y por lo tanto v aparece libre en A precisamente en aquellos lugares en los que u aparece libre en Av/u. Luego, por K4, $\wedge$ uAv/u$\supset$A será un axioma lógico de K. (Puesto que u no aparece en A, el resultado de substituir v por todas las apariciones libres de u en Av/u es el mismo A.) Luego por MP, $\vdash_K$A. Luego por 45.4, $\vdash_K \wedge$ vA. Pero ya hemos mostrado que, bajo el supuesto de que K′ es inconsistente, $\vdash_K \sim \wedge$ vA. Luego tenemos: Si K′ es inconsistente, K también lo es. Luego si K es consistente, también lo es K′.

Definición. Un sistema formal S que tiene al menos un término cerrado es *cerrado* sii para cada fórmula A que tenga una variable libre, si el resultado de substituir las apariciones libres de la variable por un término cerrado es un teorema de S para *todo* término cerrado de S, entonces $\wedge$ vA (donde v es la variable en cuestión) también es un teorema de S.

(Esto significa, informalmente, que en cualquier modelo del sistema, si algo es verdadero de todo elemento del dominio que tenga un nombre en el sistema, entonces es verdadero de *todo* elemento del dominio.)

45.13. *Si K es una teoría consistente de primer orden, entonces existe una teoría K′ de primer orden que es una extensión de K consistente, cerrada y completa respecto de la negación*

Demostración. Sea K una teoría consistente cualquiera de primer orden. Sea K_0 el sistema que resulta de añadir a K un conjunto enumerable de nuevas constantes individuales, con una enumeración efectiva de ellas. Por 45.11, K_0 es una teoría consistente de primer orden. Por 45.9 (3) existe una enumeración de las fbfs de K_0 en la que aparece una sola variable libre. Sea $\langle A_1, A_2, A_3, \ldots \rangle$ tal enumeración. Sea $\langle b_1, b_2, b_3, \ldots \rangle$ una enumeración de las constantes individuales que fueron añadidas a K para convertirla en K_0. Sea S_1 la fbf

$$A_1 b_{j1}/v^1 \supset \wedge v_1 A_1$$

donde v_1 es la variable que aparece libre en A_1, y b_{j1} es la primera constante de nuestra enumeración $\langle b_1, b_2, b_3, \ldots \rangle$ que no aparece en A_1. Para cada entero positivo n, $n>1$, sea S_n la fbf

$$A_n b_{jn}/v_n \supset \wedge v_n A_n$$

donde b_{jn} es la primera constante de nuestra enumeración que no aparece en ninguna de las $S_1 \cdots S_{n-1}$ ni en A_n.

Sea K_1 el sistema que resulta de añadir S_1 a K_0 como un axioma específico; K_{n+1} es el resultado de añadir S_{n+1} a K_n. Sea K_∞ el sistema que resulta de añadir a K_0 como axiomas específicos todos los S_i, que constituyen una cantidad enumerable. Entonces K_∞ es obviamente una extensión de K y una teoría de primer orden (en especial, todos sus axiomas específicos son fbfs cerradas). Vamos a demostrar a continuación que K_∞ es consistente y cerrado.

K_∞ es consistente

1. Cada K_i es consistente. Puesto que K_0 es consistente, y por 45.12, si K_n es consistente, entonces K_{n+1} también lo es.

2. K_∞ es consistente. Ya que supongamos que no lo es. Entonces para alguna fórmula A habría demostraciones en K_∞ de A y de $\sim$A. Estas demostraciones constarían sólo de una cantidad finita de fórmulas, y por lo tanto, solamente utilizarían una cantidad finita de los S_i. Supongamos que S_n es el S_i que tiene un número más alto de entre los utilizados en la demostración. Entonces existirían demostraciones en K_n de A y de $\sim$A. Luego uno de los K_i sería inconsistente, lo que contradice al anterior apartado 1. Luego K_∞ es consistente.

K_∞ es cerrado

Supongamos que $A_k v_k/c$ es un teorema de K_∞ para todo término cerrado c de K_∞ (v_k es la variable que aparece libre en A_k). Entonces es un teorema para la constante b_{j_k} que aparece en el axioma S_k de K_∞, esto es, el axioma:

$$A_k b_{j_k}/v_k \supset \wedge v_k A_k$$

y, por lo tanto, por Modus Ponens, obtenemos

$$\vdash_{K_\infty} \wedge v_k A_k$$

Esto vale para cada entero positivo *k*. Luego para cada fórmula A que tenga una sola variable libre, si el resultado de substituir la(s) aparición(es) libre(s) de la variable por un término cerrado es un teorema de K_∞ para todo término cerrado de K_∞, entonces también lo es $\wedge$ vA, donde v es la variable en cuestión. Luego K_∞ es cerrado.

Por 45.10, existe una teoría de primer orden K′ que es una extensión consistente y completa respecto de la negación de K_∞, y que tiene las mismas fórmulas que K_∞. Tenemos que mostrar que K′ es cerrada. Para un *n* cualquiera, sea A_n la *n*-ésima fbf de K′ que tiene una sola variable

libre de la enumeración mencionada en la p. 207 (línea de la *demostración* de 45.13). Entonces $\wedge v_n A_n$ es una fbf cerrada de K′ (v_n es la variable que aparece libre en A_n). Supongamos ahora que $A_n v_n/t$ es un teorema de K′ para todo término cerrado t de K′. $A_n v_n/b_{j_n} \supset \wedge v_n A_n$ es un axioma de K′ porque es un axioma de K_n y, por lo tanto, de K_ω. $A_n v_n/b_{j_n}$ es un teorema de K′, en virtud de nuestra hipótesis. Luego, por MP, $\wedge v_n A_n$ es un teorema de K′. Luego K′ es cerrado. Luego K′ es una teoría de primer orden que es una extensión de K que es consistente, cerrada y completa respecto de la negación. (K era una teoría consistente cualquiera de primer orden.)

Definiciones. Se dice que *un modelo* de un sistema formal es *finito/enumerable/numerable/no-numerable* según que el dominio del modelo sea finito/enumerable/numerable/no-numerable.

45.14. *Cualquier teoría de primer orden que sea consistente, cerrada y completa respecto de la negación tiene un modelo enumerable*

Demostración. Sea T cualquier teoría de primer orden que sea consistente, completa y cerrada respecto de la negación. Sea I la siguiente interpretación de T:

1. El dominio D de I es el conjunto de los *términos cerrados* de T. Por 45.9, es enumerable.

2. I asigna a cada constante c de T el mismo c (como su propia interpretación, por decirlo de alguna manera).

3. A cada símbolo funcional *n*-ádico f_i, I le asigna la función f_i, que toma argumentos y valores en D, y que está definida mediante la regla:

El valor de $f_i(x_i \ldots, x_n)$ para los argumentos $x_1 = t_1 \ldots, x_n = t_n$, en donde $t_1 \ldots, t_n$ son términos cerrados de T, es el término cerrado $f_i t_1 \ldots, t_n$.

4. A cada símbolo predicativo *n*-ádico F_i, I le asigna el conjunto de todas las *n*-tuplas ordenadas $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ de términos cerrados de T tales que $\vdash_T F_i t_1 \ldots t_n$.

5. A cada símbolo proposicional *p*, I le asigna el valor veritativo verdad sii $\vdash_T p_i$.

Demostraremos que una fórmula A de T es verdadera para I sii $\vdash_T A$, y a partir de esto, que I es un modelo de T. Sólo tenemos que considerar fbfs cerradas, puesto que una fórmula A es verdadera para I sii A^c lo es (40.7), y $\vdash_T A$ sii $\vdash_T A^c$ (45.5).

Lema que hay que demostrar: Una fbf cerrada A es verdadera para I sii $\vdash_T A$. La demostración es por inducción sobre el número, n, de cuantificadores y conectivas de A.

Base: $n=0$

Entonces A es un símbolo proposicional o tiene la forma $Ft_1, \ldots t_m$ donde $t_1, \ldots, t_m$ son términos cerrados (A es una fbf cerrada). En ambos casos A es verdadera para I sii $\vdash_T A$, en virtud de las cláusulas 5 y 4, respectivamente, de nuestra especificación de I.

Paso de la Inducción

Supongamos que el lema vale para todas las fbfs cerradas que tienen menos de k conectivas y cuantificadores. Hay que demostrar que vale para todas las fbfs cerradas que tienen exactamente k conectivas y cuantificadores. Hay tres posibilidades:

1. A es $\sim B$
2. A es $B \supset C$
3. A es $\wedge v_j\, B$

Caso 1. A es $\sim B$. Puesto que A es cerrada, B también lo es.

1. Supongamos que A no es verdadera para I. Entonces B es verdadera para I. Luego por la hipótesis de la inducción $\vdash_T B$. Luego en virtud de la consistencia de $T \sim B$ no es un teorema de T: es decir, A no es un teorema de T. Luego si $\vdash_T A$, entonces A es verdadera para I.

2. Supongamos que A es verdadera para I. Entonces B es falsa para I. Luego por la hipótesis de la inducción B no es teorema de T. Luego por la completud respecto de la negación de T, $\vdash_T \sim B$: es decir, $\vdash_T A$. Luego si A es verdadera para I, $\vdash_T A$.

Caso 2. A es $B \supset C$. Puesto que A es cerrada, B y C también lo son.

1. Supongamos que A es verdadera para I. Entonces B es verdadera para I y C es falsa para I. Luego por la hipótesis de la inducción, $\vdash_T B$ y C no es un teorema de T. Luego por la completud respecto de la negación de T, $\vdash_T \sim C$. Luego por la tautología $B \supset (\sim C \supset \sim(B \supset C))$ que es un teorema de T, obtenemos $\vdash_T \sim(B \supset C)$, es decir, $\vdash_T \sim A$. Luego, por la consistencia de T, A no es un teorema de T. Luego si A es un teorema de T. Entonces A es verdadera para I.

2. Supongamos que A no es un teorema de T. Entonces, puesto que T es completo respecto de la negación, $\vdash_T \sim A$, es decir, $\vdash_T \sim(B \supset C)$. Por $\vdash_T \sim(B \supset C) \supset B$ y $\vdash_T \sim(B \supset C) \supset \sim C$ obtenemos $\vdash_T B$ y $\vdash_T \sim C$. Luego por la

hipótesis de la inducción, B es verdadera para I. Por la consistencia de T, C no es un teorema de T; luego por la hipótesis de la inducción, C no es verdadera para I. Puesto que C es cerrada, C es falsa para I. Luego $B \supset C$, es decir, A no es verdadera para I. Luego si A es verdadera para I, $\vdash_T A$.

Caso 3. A es $\wedge v_j B$. Dos posibilidades: (I) B es cerrada, (II) B es abierta.

I. B es cerrada

1. Supongamos $\vdash_T A$. Entonces $\vdash_T B$ (por K4 y Modus Ponens). Luego por la hipótesis de la inducción, B es verdadera para I. Luego por 40.6, $\wedge v_j B$ es decir, A, es verdadera para I. Luego si $\vdash_T A$, entonces A es verdadera para I.

2. Supongamos que A es verdadera para I. Entonces, por 40.6, B también lo es. Luego, por la hipótesis de la inducción, $\vdash_T B$. Luego por 45.4, $\vdash_T \wedge v_j B$, es decir, $\vdash_T A$. Luego si A es verdadera para I, $\vdash_T A$.

II. B es abierta. Puesto que A es cerrada, la única variable libre de B es v_j, para algún j.

1. Supongamos $\vdash_T A$, es decir, $\vdash_T \wedge v_j B$. Entonces, por K4, $\vdash_T B v_j/t$ para cada término cerrado t de T. Luego, por la hipótesis de la inducción, Bv_j/t es verdadera para I para cada término cerrado t de T. Luego por 40.21, $\wedge v_j B$ es decir, A, es verdadera para I. Luego si $\vdash_T A$, entonces A es verdadera para I.

2. Supongamos que A, es decir, $\wedge v_j B$, es verdadera para I. Entonces, por 40.6, B también lo es. Luego, por 40.20, Bv_j/t es verdadera para I para todo término cerrado t de T. Luego, por la hipótesis de la inducción, $\vdash_T Bv_j/t$, para todo término cerrado t de T. Luego, en virtud del cierre de T, $\vdash_T \wedge v_j B$, es decir, $\vdash_T A$. Luego si A es verdadera para I, $\vdash_T A$.

Comentario: Para mostrar que I es un modelo de T, nos basta con establecer: Si $\vdash_T A$, entonces A es verdadera para I. Si demostramos la proposición más fuerte, $\vdash_T A$ sii A es verdadera para I es porque el 'sii' nos hace falta en la hipótesis de la inducción para demostrar la proposición más débil. Cf. un comentario semejante a éste en la demostración de 32.13 (más atrás, p.).

Esta demostración se acerca peligrosamente al borde de un círculo vicioso sin incurrir por completo en él. Queremos demostrar que si una fórmula de T es un teorema, entonces es verdadera para una interpretación determinada; y entonces definimos esa interpretación como una

interpretación en la que una fórmula atómica de T es verdadera sii es un teorema de T. Puesto que, bajo esta interpretación el que una fórmula atómica sea verdadera es precisamente que sea un teorema de T: esto es lo que queremos decir mediante 'verdadero' (para fórmulas atómicas) para esa interpretación determinada. De hecho, T se interpreta en términos de sí mismo. Esto probablemente sorprende al lector como si se tratara de un fraude, sobre todo si estaba esperando un modelo más interesante.

45.15. *Cualquier teoría consistente de primer orden tiene un modelo enumerable*

[Se trata del teorema de la 3.ª Parte.]

Demostración. Directamente a partir de

45.13. Si K es una teoría consistente de primer orden, entonces existe una teoría de primer orden K′ que es una extensión de K consistente, cerrada y completa respecto de la negación

y

45.14. Cualquier teoría que sea consistente, cerrada y completa respecto de la negación tiene un modelo enumerable

juntamente con el hecho de que si S′ es una extensión de S, entonces cualquier modelo de S′ es un modelo de S.

De forma alternativa[11], recapitulando los pasos de la demostración de 45.13:

Sea K una teoría consistente cualquiera de primer orden.

1. Ampliemos K hasta K_0, añadiendo un conjunto enumerable de nuevas constantes individuales. Por 45.11, K_0 es una teoría consistente de primer orden y una extensión de K.

2. Ampliemos K_0 hasta K_ω, añadiendo una cantidad enumerable de axiomas específicos de la forma

$$A_n b_{j_n} / v_n \supset \wedge v_n A_n$$

Por la demostración de 45.13, K_ω es una teoría de primer orden consistente y *cerrada*, y además es una extensión de K_0 y por lo tanto de K.

3. Ampliemos K_ω hasta K′ añadiendo una por una, como axiomas cada una de las fbfs cerradas que se le pueden añadir en esta fase sin que se pierda la consistencia. Por 45.10, y teniendo en cuenta

el final de la demostración de 45.13, K′ es una teoría de primer orden que es consistente, cerrada y *completa respecto de la negación*, y que es además una extensión de K_∞, y por lo tanto de K.

4. Por 45.14, K′ tiene un modelo enumerable, y por lo tanto K, del que K′ es una extensión, también tiene un modelo enumerable.

45.16. (Otra versión posible de 45.14) *Cualquier conjunto consistente de fbfs cerradas de una teoría de primer orden tiene un modelo enumerable*

Demostración. Sea Γ un conjunto consistente de fbfs cerradas de una teoría K de primer orden. Entonces K + Γ es una teoría consistente de primer orden, y por lo tanto, por 45.15, tiene un modelo enumerable, y por lo tanto, Γ tiene un modelo enumerable.

No podemos eliminar la exigencia de 45.16 de que las fbfs han de ser fbfs *cerradas*. Si Γ fuese un conjunto de fbfs cualesquiera de K, entonces K + Γ no sería necesariamente una teoría de primer orden, tal y como hemos definido 'teoría de primer orden', deben ser fbfs cerradas; y por lo tanto no podríamos aplicar 45.15 a K + Γ. Y de hecho existen conjuntos consistentes de fbfs de teorías de primer orden que no tienen modelo. Por ej. el conjunto

$$\{F^{*\prime}x',\ \sim F^{*\prime}x''\}$$

o, en la forma en que nosotros lo escribimos

$$\{Fx,\ \sim Fy\}$$

es un conjunto consistente de SQ que no tiene ningún modelo. *Demostración.* Supongamos que $\{Fx,\ \sim Fy\}$ es un conjunto inconsistente de SQ. Entonces $Fx,\ \sim Fy \vdash_{SQ} A$, donde A es una fórmula cualquiera de Q. Sea A, la fórmula $\sim(p' \supset p'$ que no es satisfecha por ninguna secuencia. Entonces $Fx,\ \sim Fy \vdash_{SQ} = (p' \supset p')$. Entonces, por 43.7, Fx, ~Fy $F_Q \sim$ $\sim(p' \supset p')$. Pero esta última proposición es ciertamente falsa: hay secuencias que satisfacen $\{Fx,\ \sim Fy\}$ pero que no satisfacen $\sim(p' \supset p')$ (Por ej., Sea I una interpretación de Q cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Asigne I verdad a p' y la propiedad de *ser un número par* al símbolo predicativo F (es decir F*′). Entonces la secuencia ⟨2, 3, 4, 5, . . .⟩ satisface tanto Fx como $\sim Fy$ [es decir Fx' y $\sim Fx''$] pero no satisface $\sim(p' \supset p')$.) Luego $\{Fx,\ \sim Fy\}$ es un conjunto consistente de SQ. Pero $\{Fx,\ \sim Fy\}$ no tiene ningún modelo. *Demostración:* Supongamos que existiera un modelo M de $\{Fx,\ \sim Fy\}$. Entonces tanto Fx como Fy serían verdaderos para M. Luego por 40.6 $\wedge x Fx$ y $\wedge y \sim Fy$ serían

ambos verdaderos para M y por lo tanto M sería un modelo de $\wedge xFx$, $\wedge y \sim Fy\}$. Pero $\wedge xFx \vdash_{SQ} Fy$ (utilizando $\vdash_{SQ} \wedge xFx \supset Fy$, por SQ4) y $\wedge y \sim Fy \vdash_{SQ} = Fy$ (utilizando $\vdash_{SQ} \wedge y \sim Fy \supset = Fy$, de nuevo por SQ4). Luego por 43.7 $\wedge xFx \vdash_{Q} Fy$ y $\wedge y \sim Fy \vdash_{Q} = Fy$. Luego cualquier modelo de $\{\wedge xFx, \wedge y \sim Fy\}$ tendría que ser modelo tanto de Fy como de $\sim Fy$, lo que es imposible. Luego $\{\wedge xFx, \wedge y \sim Fy\}$ no tiene ningún modelo. Luego $\{Fx, \sim Fy\}$ no tiene ningún modelo.

Podemos demostrar sin embargo lo que sigue:

45.17 *Cualquier conjunto consistente de fbfs de una teoría de primer orden es simultáneamente satisfacible en un dominio enumerable* [Gödel, 1930].

Para obtener este resultado demostramos, en primer lugar, que si Γ es un conjunto consistente de una teoría de primer orden, entonces el resultado de colocar nuevas constantes en el lugar de las apariciones libres de variables en Γ también es un conjunto consistente de una teoría de primer orden. Entonces, utilizando el resultado anterior 45.16, definimos una secuencia que satisfará no sólo a todo elemento del nuevo conjunto, sino también a todo elemento de Γ. Comenzamos por algunos lemas.

Lema 1. Si Γ es un conjunto consistente de una teoría K de primer orden, y K′ es una teoría de primer orden que resulta de añadir a K una cantidad enumerable de nuevas constantes individuales, entonces Γ es un conjunto consistente de K′.

Demostración. Supongamos que Γ es un conjunto de fbfs de K que es un conjunto inconsistente de K′. Entonces para alguna fórmula A de K′ existen derivaciones en K′ de A y de $\sim$A a partir de Γ. Reemplacemos en esas derivaciones cualquier constante que no esté en K por variables individuales que no aparezcan en ninguna de las dos derivaciones. Tendremos como resultado unas derivaciones *en* K a partir de Γ de alguna fórmula y de su negación. Puesto que bajo esta transformación las fórmulas que son axiomas lógicos de K′ serán, o se convertirán en, axiomas lógicos de K, las fórmulas que son axiomas específicos de K′ serán axiomas específicos de K (puesto que K′ no tiene otros axiomas específicos que los de K), y las aplicaciones del Modus Ponens en las derivaciones originales seguirán siendo aplicaciones del Modus Ponens en las cadenas transformadas. Luego si Γ (un conjunto de fbfs de K) es un conjunto inconsistente de K′, será un conjunto inconsistente de K. Luego si Γ es un conjunto consistente de K, es un conjunto consistente de K′.

Lema 2. Sea una fbf en la que alguna variable v tiene una o más apariciones libres. Sea c una constante que no aparece en A ni en ningún axioma específico de K. Entonces si $\vdash_K Av/c$, *entonces* $\vdash_K A$.

Demostración. Supongamos $\vdash_K Av/c$. Sea $A_1, \ldots, A_n$ alguna demostración que no aparece en ninguna de las fórmulas $A_1, \ldots, A_n$. Sea $A'_1, \ldots, A'_n$ el resultado de sustituir todas las apariciones de c en $A_1, \ldots, A_n$ por la variable u. Entonces $A'_1, \ldots, A'_n$ es una demostración en K de Av/u, en virtud de un argumento que ya nos es conocido (para cada A_i, si A_i es un axioma lógico de K, entonces A'_i también lo es, y si A_i es un axioma específico de K, entonces c no aparece en A_i y por lo tanto A'_i es A_i, por lo tanto es un axioma específico de K). Luego $\vdash_K Av/u$. Luego, por 45.4, $\vdash_K \wedge vAv/u$. Pero $\vdash_K \wedge uAv/u \supset A$ (axioma lógico de K, por K4: v está libre para u en Av/u). Luego por MP, $\vdash_K A$.

Demostramos ahora que el conjunto que se obtiene al colocar nuevas constantes en lugar de las apariciones libres de las variables en un conjunto consistente de una teoría de primer orden, es a su vez un conjunto consistente de una teoría de primer orden:

Sea Γ un conjunto consistente cualquiera de fbfs de una teoría cualquiera K de primer orden. Sean $v_1, \ldots, v_k$ todas las variables que tienen apariciones libres en Γ. Sea K′ la teoría de primer orden que resulta de añadir a K una cantidad enumerable de nuevas constantes $c_1, c_2, c_3, \cdots$ Sea Γ' el conjunto de fbfs cerradas que se obtiene al sustituir en los elementos de Γ las apariciones libres de las nuevas constantes substituyendo variables distintas por constantes distintas. Entonces Γ' es un conjunto consistente de K′; ya que, supongamos que Γ' fuera un conjunto inconsistente de K′. Entonces para algún subconjunto finito Δ de Γ' y alguna fórmula B de K′ tendríamos tanto $\Delta \vdash_{K'} B$ como $\Delta \vdash_{K'} \sim B$. Sean $A_3, \ldots, A_n$ los elementos de Δ. Entonces tendríamos

$$A_1, \ldots, , A_n \vdash_{K'} B$$

y

$$A_1, \ldots, , A_n \vdash_{K'} \sim B$$

y por lo tanto, por el Teorema de Deducción, aplicado *n* veces,

$$\vdash_K (A_1 \supset (\ldots, (A_n \supset B) \ldots,))$$

y de igual forma

$$\vdash_K (A_1 \supset (\ldots, (A_n \supset \sim B) \ldots,))$$

Entonces por el Lema 2, aplicado tantas veces como resulte necesario, tendríamos

$$\vdash_K (A'_1 \supset (\ldots, (A'_n \supset B') \ldots,))$$

y

$$\vdash_K (A'_1 \supset (\ldots, (A'_n \supset \sim B') \ldots,))$$

donde cada A'_i es el resultado de reemplazar cada nueva constante de A_i por su variable correspondiente, y de igual manera en el caso de B'. Así tendríamos

$$A'_1, \ldots, , A'_n \vdash_K B'$$

y

$$A'_1, \ldots, , A'_n \vdash_{K'} \sim B'$$

Ahora el conjunto $\{A'_1, \ldots, , A'_n\}$ es un subconjunto del conjunto original Γ. Así tendríamos

$$\Gamma \vdash_{K'} B'$$

y

$$\Gamma \vdash_{K'} \sim B';$$

es decir, Γ sería un conjunto inconsistente de K'. Luego por el Lema 1, Γ sería un conjunto inconsistente de K. Pero esto contradice nuestra hipótesis de que Γ era un conjunto consistente de K. Luego Γ' debe ser un conjunto consistente de K'.

Puesto que Γ' es consistente, tendrá un modelo enumerable, por 45.16. Sea M un modelo enumerable de Γ'. Vamos a definir una secuencia enumerable *s* de elementos del dominio de M de la siguiente forma: Si v_1 es la *m*-ésima variable de la enumeración fijada de las variables entonces *s* tiene que tener para su *m*-ésimo término el objeto asignado por M a la constante c_1. De igual manera, si v_2 es la *n*-ésima variable de la enumeración fijada, entonces *s* tiene que ser, para su *n*-ésimo término, el objeto asignado por M a c_2. Y así sucesivamente para todas las restantes términos de *s*, podemos tomar elementos cualesquiera del dominio de M. Puesto que M es un modelo de Γ', *s* satisface todo elemento de Γ'. Pero resulta claro, por la forma en la que hemos definido *s*, que *s* también satisfará a todo elemento de Γ. De aquí que si Γ es consistente, Γ es simultáneamente satisfacible en un dominio enumerable.

Q.E.D.

45.18. (*Teorema de Löwenheim-Skolem*) *Si una teoría de primer orden tiene un modelo, entonces tiene un modelo enumerable*

Demostración. Directamente a partir de 45.8 (si una teoría de primer orden tiene un modelo, entonces es consistente), y de 45.15 (cualquier teoría consistente de primer orden tiene un modelo enumerable).

Siguiendo la costumbre llamaremos a 45.18 'Teorema de Löwenheim-Skolem —aunque esto es vulnerar la historia, puesto que los teoremas correspondientes de Löwenheim y Skolem pertenecen a la teoría de modelos pura, y no mencionan ningún mecanismo deductivo. (Asimismo, nuestra noción de modelo, que se debe a Alfred Tarski, procede de un momento posterior.)

Nota histórica

Leopold Löwenheim (1878-1940) publicó en 1915 el teorema que establece que (en palabras nuestras, no en las suyas):

> Si una fórmula del cálculo de predicados con identidad es verdadera para toda interpretación normal con un dominio finito, entonces si es verdadera para toda interpretación normal con un dominio enumerable, entonces es verdadera para toda interpretación normal

en donde una interpretación normal es una interpretación en la que el símbolo '=' (o algún símbolo predicativo diádico) se interpreta con el significado de 'es idéntico a'. La demostración de Löwenheim tiene una pequeña laguna.

Thoralf Skolem (1887-1963) demostró en 1919 que:

> Si un conjunto de fórmulas del cálculo de predicados es simultáneamente satisfacible en cualquier dominio no-vacío, entonces es simultáneamente satisfacible en algún dominio enumerable.

45.19 *Si existe alguna interpretación I para la cual todo axioma específico de una teoría K de primer orden es verdadero, entonces K tiene un modelo*

Demostración. Todo axioma lógico de K es lógicamente válido, y por lo tanto, es verdadero para I. Supongamos que todo axioma específico de K también es verdadero para I. Entonces todo axioma de K es verdadero para I. Luego todo teorema de K es verdadero para I; es decir, K tiene un modelo.

45.20 (*Teorema de Compacidad: Gödel, 1930, desde el punto de vista de la teoría pura de modelos (cf. 32.20)*) *Si todo subconjunto finito del conjunto de axiomas específicos de una teoría K de primer orden tiene un modelo, entonces K tiene un modelo*

Demostración. Supongamos que K no tiene ningún modelo. Entonces K es inconsistente, en virtud de 45.15. Luego, por un argumento que ya conocemos, existe un subconjunto finito Δ de axiomas específicos de K tal que, para alguna fórmula A, existe una demostración en K de A y una demostración en K de $\sim$A, y estas demostraciones no utilizan ningún axioma específico que no esté en Δ. Tomemos Δ como el conjunto de axiomas específicos de una nueva teoría K′ de primer orden que tiene el mismo lenguaje que K. Entonces $\vdash_K$A y $\vdash_{K'} \sim$A. Luego K′ es inconsistente. Luego por 45.8, K′ no tiene ningún modelo. Luego por 45.19, no existe ninguna interpretación para la cual todo axioma específico de K′ sea verdadero; es decir, Δ no tiene ningún modelo; es decir, un subconjunto finito del conjunto de axiomas específicos de K no tiene ningún modelo. Luego si todo subconjunto finito del conjunto de axiomas específicos de K tiene un modelo, entonces K tiene un modelo.

Los restantes metateoremas de esta sección sólo se utilizarán en la 4.ª Parte. Pueden omitirse en una primera lectura de esta 3.ª Parte.

45.21 *Si* $\Gamma \vdash_K A$ y v no aparece libre en Γ, entonces $\Gamma \vdash_K \wedge vA$ (Se trata de una extensión de 45.4)

Demostración (Es una sencilla modificación y extensión de la demostración de 45.4). Supongamos que $\Gamma \vdash_K$A y que v no aparece libre en Γ. Mostraremos que $\Gamma \vdash_K \wedge$vA, por inducción sobre la longitud, *n*, de una derivación de A a partir de Γ.

Base: $n = 1$

Hay tres posibilidades:

1. A es un axioma lógico de K.
2. A es un axioma específico de K.
3. A está en Γ.

1. Supongamos que A es un axioma lógico de K. Entonces $\wedge$vA también es un axioma lógico de K, por K7. Luego $\Gamma \vdash_K \wedge$vA.

2. Supongamos que A es un axioma específico de K. Entonces $\wedge$vA es un teorema de K, por los pasos

A
A $\supset \wedge$vA [K5. Al ser A un axioma específico, es una fbf cerrada.
$\wedge$vA
Luego $\Gamma \vdash_K \wedge$vA.

3. Supongamos que A está en Γ. Entonces $\wedge v A$ es derivable a partir de Γ, por los pasos

A

$A \supset \wedge v A$ [K5. Por hipótesis, v no está libre en Γ, y por lo tanto no está libre en A]

$\wedge v A$

Luego $\Gamma \vdash_K \wedge v A$

Paso de la Inducción

Supongamos que el teorema vale para todas las derivaciones (de A a partir de Γ) de una longitud menor que k. Hay que demostrar que vale para todas las derivaciones de una longitud k. Hay cuatro casos:

1-3. Igual que en la Base.

4. A es una consecuencia inmediata, por MP, de dos fbfs que la preceden.

Casos 1-3. Igual que en la Base.

Caso 4. Sea $A_1, \ldots, , A_k$ una derivación de A a partir de Γ (luego A_k es A). A es una consecuencia inmediata por MP de A_i y A_j, donde $i<k$ y $j<k$ y A_j es $A_i \supset A$. Entonces, por la hipótesis de la inducción, $\Gamma \vdash_K \wedge v A_i$ y $\Gamma \vdash_K \wedge v(A_i \supset A)$. Por K6 $\vdash_K \wedge v(A_i \supset A) \supset (\wedge v A_i \supset \wedge v A)$. Luego por MP dos veces $\Gamma \vdash_K \wedge v A$.

45.22. *Si v no tiene ninguna aparición libre en B, entonces* $\vdash_K \wedge v(A \supset B) \supset (\vee v A \supset B)$

Demostración. Abreviamos $\wedge v(A \supset B)$ mediante P. v no tendrá ninguna aparición libre en B. Entonces:

1.	$P \vdash_K \wedge v(A \supset B)$	[P es $\wedge v(A \supset B)$]
2.	$\vdash_K \wedge v(A \supset B) \supset (A \supset B)$	K4
3.	$P \vdash_K A \supset B$	1, 2, MP
4.	$P \vdash_K \sim B \supset \sim A$	A partir de 3, por lógica proposicional [es decir, utilizando solamente instancias de esquemas tautológicos, y MP]
5.	$P \vdash_K \wedge v(\sim B \supset \sim A)$	A partir de 4 por 45.21 [v no aparece libre en P]
6.	$\vdash_K \wedge v(\sim B \supset \sim A) \supset (\wedge v \sim B \supset \wedge v \sim A)$	K6
7.	$P \vdash_K \wedge v \sim B \supset \wedge v \sim A$	5, 6, MP
8.	$\vdash_K \sim B \supset \wedge v \sim B$	K5 [v no aparece libre en B]

9. $P \vdash_K \sim B \supset \wedge v \sim A$ — 7, 8, lógica proposicional
10. $P \vdash_K \sim \wedge v \sim A \supset B$ — 9, lógica proposicional
i.e. $\vee v(A \supset B) \vdash_K \vee vA \supset B$

Luego por el Teorema de Deducción $\vdash_K \wedge v(A \supset B) \supset (\vee vA \supset B)$

45.23 *Si la variable u no aparece libre en A, entonces* $\vdash_K \vee vA \supset \wedge uAv/u$.

Demostración. Sea u una variable que no aparece libre en A. Entonces

1. $\vdash_K \wedge u \sim Av/u \supset \sim A$ — K4 [Puesto que u no aparece libre en $\sim A$, y $\sim Av/u$ es precisamente el resultado de reemplazar por u todas las apariciones libres de v en $\sim A$ siempre que v esté libre en $\sim A$, u estará libre en $\sim Av/u$ y a la inversa]
2. $\vdash_K A \supset \sim \wedge u \sim Av/u$ — 1, lógica proposicional
i.e. $\vdash_K A \supset \vee uAv/u$
3. $\vdash_K \wedge v(A \supset \vee uAv/u)$ — 2, 45.4
4. $\vdash_K \wedge v(A \supset \vee uAv/u) \supset (\vee vA \supset \vee uAv/u)$ — 45.22 [v no tiene ninguna aparición libre en $\vee uAv/u$]
5. $\vdash_K \vee vA \supset \vee uAv/u$ — 3, 4, MP

45.24. *Sea K una teoría cualquiera de primer orden. Sea K' una teoría de primer orden que resulta simplemente de añadir a K una cantidad enumerable de nuevas constantes individuales. Sea A una fórmula de K en la que una variable v tiene una o más apariciones libres. Entonces si* $\Gamma \vdash_K \vee vA$ *y* Γ, $Av/c \vdash_K$ B, en donde c es una de las constantes que están en K' *pero no en K, y c no aparece en B, entonces* $\Gamma \vdash_K B$

45.24, en esta u otra versión, recibe frecuentemente el nombre de *Regla E* [Regla de Elección]. El nombre se debe a Rosser (1953, p. 128: cf. también Mendelson, p. 73, Margaris, p. 79). Se le llama Regla de Elección porque es un análogo formal de un método de argumentación que se encuentra en la matemática de cada día en el que aparece algo que podría denominarse acto de elección. Dicho brevemente, lo que sucede en los argumentos matemáticos es que el matemático, después de mostrar que una propiedad determinada pertenece a una cosa u otra, dice 'Sea N una cosa que tiene esta propiedad', en donde 'N' es un

nombre arbitrariamente elegido y no hay que suponer acerca de N nada excepto que tiene la propiedad en cuestión. El matemático continúa después con su demostración y acaba con un teorema en el que el objeto N no se menciona. Destaquemos, sin embargo, que el mismo 45.24 es un metateorema de la teoría de la demostración pura, y que no dice nada acerca de actos de elección de ningún tipo.

Demostración. Supongamos $\Gamma\vdash_K \vee vA$ y también Γ, $Av/c\vdash_{K'}B$ donde c es una de las constantes que está en K′ pero no en K, y c no aparece en B. Por el Teorema de Deducción $\Gamma\vdash_{K'}Av/c\supset B$. Por lo tanto habrá una derivación en K′ de $Av/c\supset B$ a partir de un subconjunto finito Δ de Γ. Reemplacemos en esta derivación todas las constantes distintas $c_1 \cdots c_n$ que no están en K por variables distintas $u_1 \cdots u_n$ que no aparecen en la derivación. Ahora K′ no tiene otros axiomas específicos que los de K; y bajo la transformación todos los axiomas lógicos de K′ de la derivación original se convierten en axiomas lógicos de K, y las aplicaciones de MP de la derivación original siguen siendo aplicaciones de MP. Luego la transformación proporciona una derivación en K de $Av/u\supset B$ a partir de Δ, en donde u es una de las variables del conjunto $\{u_1 \cdots u_n\}$. Luego $\Delta\vdash_K Av/u\supset B$, en donde u no aparece en Δ o en A o en B.

Luego 1. $\Delta\vdash_K \vee u(Av/u\supset B)$ por 45.21.
Luego 2. $\Delta\vdash_K \vee uAv/u\supset B$ por 1, 45.22 y MP.
Luego 3. $\Gamma\vdash_K \vee uAv/u\supset B$ puesto que Δ es un subconjunto de Γ.
Tenemos ahora por hipótesis
4. $\Gamma\vdash_K \vee vA$
Luego 5. $\Gamma\vdash_K \vee uAv/u$ por 4, 45.23 y MP.
Luego 6. $\Gamma\vdash_K B$, a partir de 3 y 5 por MP.

45.25 *Si t es un término cerrado de K, entonces* $\vdash Av/t\supset \vee vA$

Demostración

1. $\vdash_K \wedge v\sim A\supset \sim Av/t$ K4 [Puesto que t es un término cerrado, t está libre para v en A]
2. $Av/t\supset \sim \wedge v\sim A$ A partir de 1, por lógica proposicional, es decir, $\vdash_K Av/t\supset \vee vA$

Nota sobre la definición de 'teoría de primer orden'

Dos de los rasgos que definen las teorías de primer orden, tal y como utilizamos esta expresión, son los siguientes:
(1) El Modus Ponens para $\supset$ es su *única* regla de inferencia.

(2) Todos sus axiomas específicos son fbfs *cerradas*.

Pero en la literatura pueden encontrarse otras definiciones de 'teoría de primer orden'. Por ejemplo, la definición de Elliot Mendelson (1964) es muy diferente de la nuestra. En el sentido manifestado por él, las teorías de primer orden tienen una regla de inferencia adicional, esto es, la Regla de Generalización:

$$\wedge v_k A \text{ es una consecuencia inmediata de } A$$

Mendelson también admite que las fórmulas abiertas sean axiomas específicos de sus teorías de primer orden. En consecuencia, en el caso de sus teorías de primer orden, el Teorema de Deducción vale solamente de una manera restringida, y ni

$$\text{Si } \Gamma \vdash A \text{ entonces } \Gamma \models A$$

ni

$$\text{Si } A \vdash B \text{ entonces } \models A \supset B$$

valen para ellas.

Otra consecuencia de la definición de 'teoría de primer orden' que da Mendelson es que algunos conjuntos que, por nuestra definición, son consistentes, resultan ahora inconsistentes en virtud de la suya: por ej., el conjunto $\{Fx, \sim Fy\}$. En consecuencia, él es capaz de establecer

> Cualquier conjunto consistente de fbfs de una teoría de primer orden [en su sentido] tiene un modelo enumerable

mientras que nosotros sólo podemos obtener

> Cualquier conjunto consistente de fbfs de una teoría de primer orden [en nuestro sentido] es simultáneamente satisfacible en algún dominio enumerable (45.17)

Podemos obtener, sin embargo

> Cualquier teoría consistente de primer orden tiene un modelo enumerable (45.15)

y también es verdad de nuestro[12] sistema de la lógica de predicados de primer orden, pero no de la suya, que la consecuencia sintáctica y la consecuencia semántica coinciden, es decir, $\Gamma \vdash_{SQ} A$ sii $\Gamma \models_Q A$ [46.3]

46. Demostración de la completud semántica de SQ

46.1 (*Teorema de completud semántica para SQ*) *Toda fórmula de Q lógicamente válida es un teorema de SQ: es decir, si* $\models_Q A$ *entonces* $\vdash_{SQ} A$

Demostración

1. Supongamos que C es una fbf *cerrada* de Q que no es un teorema de SQ. Entonces SQ+{~C} es una teoría consistente de primer orden, por 45.6. Luego SQ+{~C} tiene un modelo, por 45.15. Luego ~C tiene un modelo. Luego C no es lógicamente válida. Luego si C es una fbf de Q cerrada y lógicamente válida, entonces C es un teorema de SQ.

2. Supongamos que A es una fbf de Q (abierta o cerrada) que es lógicamente válida. Entonces una clausura cualquiera de A, A^c, es lógicamente válida, por 40.8. Luego A^c es un teorema de SQ, por el anterior Paso 1. Luego A es un teorema de SQ, por 45.5. Luego si A es una fbf de Q lógicamente válida, entonces A es un teorema de SQ.

Demostración alternativa

1. Supongamos que C es una fbf cerrada de Q que no es un teorema de SQ. Entonces {~C} es un conjunto consistente [de fbfs cerradas] de SQ, por 45.7. Luego {~C} tiene un modelo, por 45.16. El resto de la demostración es como la anterior.

46.2 (*Teorema de completud 'fuerte' para SQ*) *Si* $\Gamma \models_Q A$, *entonces* $\Gamma \vdash_{SQ} A$

Demostración. Supongamos $\Gamma \models_Q A$. Entonces $\Gamma \cup \{\sim A\}$ no es simultáneamente satisfacible. Luego $\Gamma \cup \{\sim A\}$ es un conjunto inconsistente de SQ, por 45.17. Luego $\Gamma \vdash_{SQ} A$, por 43.9. Luego si $\Gamma \models_Q A$ entonces $\Gamma \vdash_{SQ} A$.

46.3 $\Gamma \vdash_{SQ} A$ *sii* $\Gamma \models_Q A$

Demostración. Directamente a partir de 46.2 y 43.7 (si $\Gamma \vdash_{SQ} A$ entonces $\Gamma \models_Q A$).

SQ no es completo respecto de la negación ni sintácticamente completo:

46.4 *SQ no es completo respecto de la negación*

Demostración. Ni $\wedge x' F^{*'} x'$ ni $\sim \wedge x' F^{*'} x'$ son teoremas de SQ, ya que ninguna de las dos fórmulas es lógicamente válida, y todos los teoremas de SQ son lógicamente válidos. [También podríamos haber tomado p' y $\sim p'$.]

46.5 *SQ no es sintácticamente completo*

Demostración. El esquema

$$\vee v A \supset \wedge v A$$

no es susceptible de demostración en SQ, ya que no es lógicamente válido. Sin embargo, puede ser añadido como esquema de axioma a SQ sin merma de la consistencia, puesto que será verdadero para cualquier interpretación que tenga un dominio de un solo elemento para una interpretación de ese tipo todos los axiomas de SQ serán verdaderos (puesto que son verdaderos para toda interpretación), y el Modus Ponens preserva la verdad, luego todos los teoremas serán verdaderos para una interpretación de ese tipo, y el sistema será consistente.

Luego existe un esquema no susceptible de demostración que puede añadirse a SQ como esquema de axioma sin merma de la consistencia. Luego SQ no es sintácticamente completo.

47. Un sistema formal de la lógica de predicados de primer orden con identidad: El sistema $SQ^{=}$. Demostración de la consistencia de $SQ^{=}$. Modelos normales. Demostración de la adecuación de $SQ^{=}$

$SQ^{=}$ es una teoría de primer orden que tiene el mismo lenguaje que SQ (es decir, el lenguaje Q) y una cantidad enumerable de axiomas específicos, esto es, el axioma

$SQ^{=}1 \quad \wedge x'F^{**}x'x'$

y los axiomas proporcionados por $SQ^{=}2$:

$SQ^{=}$ 2 Todo cierre de $F^{**}x'x'' \supset (A \supset A')$, en donde A y A′ son fbfs de Q y A′ es como A excepto en que x'' puede reemplazar a cualquier aparición libre de x' en A, supuesto que x'' aparece libre siempre que reemplaza a x' [x'' no tiene por qué ser substituida para *toda* aparición libre de x' en A.]

Si escribimos $=$ en vez de F^{**}, x en vez de x', y en vez de x'', y $x'=x''$ en vez de $=x'x''$, y añadimos corchetes que indiquen el agrupamiento, se hace evidente la interpretación propuesta de los nuevos axiomas:

$SQ^{=}$ 1 $\wedge x[x=x]$

$SQ^{=}$ 2 Todo cierre de $x=y \supset (A \supset A')$, donde A y A′ son como se ha explicado.

Consistencia de $SQ^{=}$

Para cada fbf A de Q definimos su fórmula proposicional asociada, (f.p.a.), A^{prop}, de la siguiente forma:

Borramos de A todos los cuantificadores y sus variables índices[13]. Reemplazamos cada término por x'. En la cadena resultante reemplazamos cada aparición de $F^{**}{}'x'x'$ por $(p' \supset p')$. En la cadena resultante borramos todos los términos y reemplazamos cada símbolo predicativo por p'. El resultado, A^{prop}, es una fórmula de P.

Denominaremos a este procedimiento la *transformación* de A en A^{prop}.

Vamos a mostrar que la f.p.a. de cada axioma de $SQ^{=}$ es una tautología de P. Todo lo que sea una consecuencia inmediata en $SQ^{=}$ por Modus Ponens de dos fórmulas cada una de las cuales tiene como f.p.a. suya una tautología de P, también tendrá como f.p.a. suya una tautología de P, ya que $(A \supset B)^{prop}$ es $(A^{prop} \supset B^{prop})$. Luego cada teorema de $SQ^{=}$ tiene como f.p.a. suya una tautología de P. Pero la fórmula

$$\sim F^{**}{}'x'x'$$

de Q tiene como f.p.a. $\sim(p' \supset p')$, que no es una tautología de P. Luego $\sim F^{**}{}'x'x'$ no es un teorema de $SQ^{=}$. Luego $SQ^{=}$ es consistente. Queda por demostrar que cada axioma de $SQ^{=}$ tiene como f.p.a. una tautología de P.

Es obvio que todo lo que sea un axioma en virtud de cualquiera de los esquemas SQ 1-3 tendrá como f.p.a. una tautología de P.

Todo lo que sea un axioma de $SQ^{=}$ por SQ 4 [$\wedge vA \supset Av/t$ si t está libre para v en A] se convierte en el primer paso de la transformación $A' \supset A'v/t$ en donde A' no tiene ningún cuantificador y A'v/t es como A' excepto en que el término t puede reemplazar a la variable v en alguna de sus apariciones en A'. En el siguiente paso tenemos $A'' \supset A'$, en donde A'' resulta de A' o A'v/t reemplazando cada término de A' o de A'v/t por x'. A partir de ese momento en adelante todos los cambios afectan de igual forma a los dos lados de $\supset$, y el resultado final es la tautología $A^{prop} \supset A^{prop}$.

Todo lo que sea un axioma en virtud de SQ 5 [$A \supset \wedge vA$ si v no aparece libre en A] se convierte, en el primer paso, en $A' \supset A'$ donde A' no tiene ningún cuantificador, y finalmente en $A^{prop} \supset A^{prop}$, que es una tautología de P.

Todo lo que sea un axioma por SQ 6 [$\wedge v(A \supset B) \supset (\wedge vA \supset \wedge vB]$ se

convierte, primero, en $(A' \supset B') \supset (A' \supset B')$, en donde A' y B' no tienen cuantificadores, y finalmente, en la tautología de P, $(A^{prop} \supset B^{prop}) \supset (A^{prop} \supset B^{prop})$.

A la vista de lo sucedido hasta este momento, todo lo que sea un axioma por SQ 7 tendrá como f.p.a. una tautología de P.

$SQ^{=}$ 1[$\wedge x' F^{**\prime} x' x'$] se convierte primero en $F^{**\prime} x' x'$ y después en $(p' \supset p')$ que es una tautología de P.

Todo lo que sea un axioma por SQ 2 [todo cierre de $F^{**\prime} x' x'' \supset (A \supset A')$] se convierte, en el primer paso, en $F^{**\prime} x' x'' \supset (A^* \supset A^{**})$, en donde A* y A'* no tienen cuantificadores. Después se convierte en $F^{**\prime} x' x' \supset (A^{*R} \supset A/^{R})$ en donde A^{*R} es como A* excepto en que todo término de A* es reemplazado por x'. Finalmente obtenemos $(p' \supset p') \supset (A^{prop} \supset A^{prop})$, que es una tautología de P.

Luego:

47.1 *$QS^{=}$ es consistente*

47.4 nos proporciona otra demostración de consistencia.

Definición. I es una *interpretación normal* de Q (Q^{+}) sii I es una interpretación de Q (Q^{+}) e I asigna la relación de identidad, definida para elementos del dominio de I, al símbolo predicativo $F^{**\prime}$.

Diremos que una teoría K de primer orden es una *teoría de primer orden de identidad* si K tiene a $SQ^{=}$ 1 como axioma, y a $SQ^{=}$ 2 (aplicado a las fbfs del lenguaje de K) como un esquema axiomático suyo.

Definición. I es un *modelo normal* de una teoría K de primer orden con identidad sii I es una interpretación normal del lenguaje de K e I es un modelo de K.

47.2 *Si K es una teoría consistente de primer orden con identidad, entonces K tiene un modelo normal numerable*

Esquema de la demostración. Sea K una teoría consistente de primer orden de identidad. Por la demostración de 45.15, K tiene un modelo enumerable, M, cuyo dominio, D, es el conjunto de todos los términos cerrados de K. Distribuyamos los términos cerrados de K en conjuntos disjuntos (es decir, conjuntos que no tienen ningún elemento en común) S_1, S_2, etc., de la siguiente forma:

Sea c_{j_1} el primer término cerrado de alguna enumeración de los términos cerrados de K. Entonces c_{j_1} tiene que ser un elemento de S_1, y, para cualquier término cerrado t, t tiene que ser un elemento de S_1

sii $\vdash_K t = c_{j_1}$ [es decir, $\vdash_K F^{**\prime} t c_{j_1}$]. Sea c_{j_2} el primer término cerrado (si es que hay alguno) de la enumeración que no es un elemento de S_1. Entonces c_{j_2} tiene que ser un elemento de S_2 y, para cualquier término cerrado t, t tiene que ser un elemento de S_2 sii $\vdash_K t = c_{j_2}$. Y así sucesivamente.

Cada término cerrado de K pertenece a un, S_i, y sólo a uno, y para cada término cerrado t, $\vdash_K t = c_{j_i}$ para algún entero positivo *i* (dejamos las demostraciones como ejercicios para el lector) $\vdash_K t = t$ para cada término t de K, por $SQ^=$ 1 y K4.

Sea M′ la interpretación de K cuyo dominio D′ es el conjunto $\{c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_3}, \ldots\}$. Este conjunto es numerable, pero no es necesariamente enumerable: por ej., si para todo término cerrado t $\vdash_K t = c_{j_1}$ entonces D′ es $\{c_{j_1}\}$. A cada término cerrado t de K, M′ le asigna el término cerrado c_{j_1} de D′ tal que $\vdash_K t = c_{j_1}$. A *F**′*, M′ le asigna la relación de identidad (para el dominio D′). En todos los demás aspectos M′ es como M.

Sea $s = \langle d_1, d_2, \ldots \rangle$ una secuencia enumerable de elementos de D, y sea $s' = \langle d'_1, d'_2, \ldots \rangle$ la secuencia enumerable de elementos de D′ que resulta de *s* cuando se reemplaza cada d_i de *s* por el elemento d'_i de D′ tal que $\vdash_K d_i = d'_i$ (d_i y d'_i son términos cerrados de K). Entonces puede demostrarse por inducción sobre el número de cuantificadores y conectivas de A que una fbf A es satisfecha por *s* en M sii A es satisfecha por *s′* en M′. De ello se sigue que, para cualquier fbf A de K, A es verdadera para M sii A es verdadera para M′. Puesto que M es un modelo de K, M′ es un modelo de K. Es además un modelo normal de K, y tiene un dominio numerable.

Adecuación de $SQ^=$

Queremos que $SQ^=$

(1) tenga como teoremas las fbfs lógicamente válidas de Q y además todas las fbfs de Q que, aunque no sean lógicamente válidas, sean verdaderas para toda interpretación de Q para la cual *F**′* se interprete como 'es idéntico a';

(2) tenga como teoremas *sólo* esas fbfs.

Esto es:

1. Queremos que cualquier fórmula de Q que sea verdadera para toda interpretación normal de Q sea un axioma de $SQ^=$.
2. Queremos que todo teorema de $SQ^=$ sea verdadero para toda interpretación normal de Q.

47.3. *Cualquier fórmula de Q que sea verdadera para toda interpretación normal de Q es un teorema de* $SQ^{=}$

Demostración

1. Supongamos que C es una fbf cerrada de Q que es verdadera para toda interpretación normal de Q. Sea $SQ^{=}+\{\sim C\}$ el resultado de añadir $\sim C$ a $SQ^{=}$ como un axioma específico. Si M es cualquier modelo normal para $SQ^{=}+\{\sim C\}$, entonces tanto C como $\sim C$ son verdaderas para M. Esto es imposible. Luego $SQ^{=}+\{\sim C\}$ no tiene ningún modelo normal. Pero $SQ^{=}+\{\sim C\}$ no tiene ningún modelo normal. Pero $SQ^{=}+\{\sim C\}$ es una teoría de primer orden con identidad, luego por 47.2, es inconsistente. Luego, por 45.6, C es un teorema de $SQ^{=}$.

2. Sea A una fbf de Q (abierta o cerrada) que es verdadera para toda interpretación normal de Q. Entonces, por 40.7, A^{c} es verdadera para toda interpretación normal de Q. Luego A^{c} es un teorema de $SQ^{=}$, en virtud del anterior Paso 1. Luego A es un teorema de $SQ^{=}$, por 45.5.

47.4. *Todo teorema de* $SQ^{=}$ *es verdadero para toda interpretación normal de Q*

Demostración. Los axiomas lógicos de $SQ^{=}$ son los axiomas de SQ. Todo axioma de SQ es lógicamente válido (cf. 43.5) y, por lo tanto, es verdadero para toda interpretación normal.

Los axiomas específicos de $SQ^{=}$ son $SQ^{=}$ 1 y todas las fórmulas que sean admitidas como axiomas en virtud de $SQ^{=}$ 2.

$SQ^{=}$ 1 es verdadero para toda interpretación normal de Q.

$SQ^{=}$ 2 admite como axioma cualquier cierre de $F^{**}x'x''\supset(A\supset A')$ en donde A′ es como A excepto en que x'' puede reemplazar a cualquier aparición libre de x' en A, supuesto que x'' aparece libre en todas las ocasiones en que reemplaza a x'. Sea N cualquier interpretación normal de Q. Una secuencia enumerable s satisface la parte izquierda de $SQ^{=}$ 2 para N sii sus dos primeros términos son los mismos. Puesto que A′ se diferencia de A como máximo en que tiene alguna (s) aparición (es) libre (s) de x'' en donde A tiene alguna (s) aparición (es) libre (s) de x′, cualquier secuencia cuyos dos primeros términos sean los mismos y que satisfaga A para N, satisfará A′ para N. Luego cualquier secuencia que satisfaga la parte izquierda para N, satisfará la parte derecha para N. Luego toda secuencia de una interpretación normal satisface $F^{**}x'x''\supset(A\supset A')$. Luego toda secuencia de una interpretación normal satisface cualquier cierre de esta expresión, y por lo tanto, cualquier expresión que sea un axioma en virtud de SQ 2. Luego cualquier axioma por $SQ^{=}$ 2 es verdadero para toda interpretación normal.

Luego todo axioma de $SQ^{=}$ es verdadero para toda interpretación normal. El Modus Ponens para $\supset$ preserva la verdad para una interpretación y por lo tanto, preserva la verdad para una interpretación normal. Luego todo teorema de $SQ^{=}$ es verdadero para toda interpretación normal.

47.4 nos proporciona otra demostración de la consistencia de $SQ^{=}$, puesto que (por ejemplo) $\sim F^{**}{}'x'x'$ no es verdadera para cualquier interpretación normal de Q y por lo tanto no es un teorema de $SQ^{=}$.

48. Isomorfismo de modelos. Categoricidad. Modelos no-clásicos

En el ámbito de esta sección vamos a redefinir 'teoría de primer orden' de modo que signifique 'sistema formal que sería una teoría de primer orden según nuestra antigua definición, si no fuera por el hecho de que *no tiene símbolos proposicionales*'. Todos los metateoremas que hemos demostrado hasta este momento para teorías de primer orden en nuestro antiguo sentido valen de la misma manera para teorías de primer orden concebidas en el nuevo sentido. Y en particular, siguen siendo válidos:

1. Cualquier teoría consistente de primer orden tiene un modelo enumerable.
2. (Teorema de Löwenheim-Skolem) Si una teoría de primer orden tiene un modelo, tiene un modelo enumerable.

Además, Tarski ha mostrado (1928) (para teorías de primer orden en los dos sentidos) que:

3. (Teorema Ascendente de Löwenheim-Skolem) Si una teoría de primer orden tiene un modelo infinito, entonces tiene un modelo de una cardinalidad infinita cualquiera; y si una teoría de primer orden tiene un modelo infinito normal, entonces tiene un modelo normal de una cardinalidad infinita cualquiera. (NT).

(NT) Si formulamos el Teorema Ascendente de Löwenheim-Skolem de la siguiente forma (siendo T un conjunto cualquiera de enunciados de la lógica elemental que tiene una cardinalidad x, y λ y μ cardinales infinitos tales que $x \leqslant \lambda < \mu$): «Si T tiene un modelo de cardinalidad λ, entonces T tiene un modelo de cardinalidad μ», el Teorema Descendente sería: «Si T tiene un modelo de cardinalidad μ, entonces T tiene un modelo de cardinalidad λ». Los dos teoremas juntos implican que si T tiene un modelo infinito de cardinalidad no menor que la de T, entonces tiene modelos de todas las cardinalidades infinitas no menores que las de T. Y lo mismo se sigue del supuesto, más débil, que establece que T tiene un modelo infinito (cf. P. Lindström, '*On Characterizing Logic*', en S. Stendlund (ed), *Logical Theory and Semantic Analysis*, pp. 129-146, D. Reidel - Dordrecht (Holland) (1974), donde se recoge lo anterior dentro de un panorama más general, con un propósito diferente. Cf. también Shoenfield (1967).

Isomorfismo de modelos

Intuitivamente hablando, dos modelos de un sistema formal son isomorfos si tienen exactamente la misma forma y como máximo se diferencian en su contenido. En el caso de teorías de primer orden cocebidas en el nuevo sentido (es decir, sin símbolos proposicionales), el siomorfismo consiste en lo siguiente:

Sea K una teoría de primer orden. Sean M y M'un dominio D'. Para cada constante c de K, sea d el elemento de D que M le asigna, y sea d' el elemento de D' que M' le asigna. Para cada símbolo funcional f de K, sea f la función que M le asigna, y f' la función que M' le asigna, y sea R' la relación que M' le asigna. Entonces M es *isomorfo* respecto a M' sii existe una correspondencia uno a uno entre D y D' que empareje cada elemento d de D con un elemento d' de D' de forma que:

M asigna d a una constante c sii M' asigna d' a c.
$f(d_1, \ldots, d_n) = d$ sii $f'(d'_1, \ldots, d'_n) = d'$
$d_1, \ldots, d_n$ (en ese orden) están en la relación R sii
$d'_1, \ldots, d'_n$ (en ese orden) están en la relación R'.

De la definición se sigue que dos modelos de una teoría de primer orden no pueden ser isomorfos si sus dominios tienen cardinalidades diferentes.

Establecemos sin demostración que

48.2. *Si M y M' son modelos isomorfos de una teoría de primer orden, entonces una fórmula A de K es verdadera para M sii es verdadera para M'*

Categoricidad

En la literatura se utiliza la palabra 'categórico' en diversos sentidos:

1. Se dice que un sistema formal es categórico sii todos sus modelos son isomorfos.

En este sentido de 'categórico' ninguna teoría consistente de primer orden es categórica, ya que, en virtud de los anteriores puntos 1 y 3 cualquier teoría consistente de primer orden tiene modelos de toda cardinalidad infinita.

2. Se dice que una teoría de primer orden con identidad es categórica sii todos sus modelos *normales* son isomorfos.

En este sentido de 'categórico', ninguna teoría de primer orden que tenga un modelo infinito es 'categórica' (en virtud del Teorema As-

cendente de Löwenheim-Skolem). Pero algunas teorías de primer orden que tienen solamente modelos normales finitos son categóricas: por ej., cualquier teoría de primer orden con identidad, consistente y completa respecto de la negación, que tiene la fórmula

$$\wedge x \wedge y[x = y]$$

como un axioma específico tendrá solamente modelos normales finitos (cualquier modelo normal finito de ella debe tener un dominio de un solo elemento), y todos sus modelos normales serán isomorfos.

3. Se dice que una teoría de primer orden es α-categórica (alfa-categórica), en donde α es un número cardinal, sii tiene un modelo normal de cardinalidad α y dos modelos normales cualesquiera de cardinalidad α son isomorfos.

Las teorías de primer orden mencionadas en el apartado 2 son 1-categórica.

48.3. *Si todos los modelos normales de una teoría de primer orden con identidad son isomorfos, entonces la teoría es completa respecto de la negación (es decir, si una teoría de primer orden con identidad es categórica, en el segundo de los sentidos anteriores, entonces es completa respecto de la negación)*

Demostración. Sea K una teoría de primer orden con identidad que no es completa respecto de la negación. Entonces para alguna fbf cerrada D ni $\vdash_K C$ ni $\vdash_K \sim C$. Por lo tanto, por 45.6, tanto $K + \{\sim C\}$ como $K + \{\sim C\}$ son teorías consistentes de primer orden (con identidad). Por lo tanto, por 47.2, ambas tienen modelos normales. Sea M cualquier modelo normal de $K + \{\sim C\}$ y M′ cualquier modelo normal de $K + \{C\}$. Entonces C es falsa en M y verdadera en M′. Luego M y M′ no son isomorfos, por [48.2]. Luego si todos los modelos normales de K son isomorfos, K es completa respecto de la negación.

Modelos no-clásicos

Un modelo de un sistema formal es un *modelo no-clásico* si no es isomorfo con el modelo clásico (o propuesto) del sistema. Para ilustrar la noción de modelo no-clásico, comenzaremos presentando un conjunto de axiomas[14] para una parte de la aritmética ('Sx' en la interpretación propuesta significa 'el sucesor de x'):

$$1 \quad \wedge x \wedge y(Sx = Sy \supset x = y)$$
$$2 \quad \wedge x[0 \neq Sx]$$

$$
\begin{array}{ll}
3 & \wedge\, x(x \neq 0 \supset \vee\, y[x = \mathrm{S}y]) \\
4 & \wedge\, x[x + 0 = x] \\
5 & \wedge\, x \wedge\, y[x + \mathrm{S}y = \mathrm{S}[x + y]] \\
6 & \wedge\, x[\mathrm{x}.0 = 0] \\
7 & \wedge\, x \wedge\, y[\mathrm{x}.\mathrm{S}y = [\mathrm{x}.\mathrm{y}] + \mathrm{x}]
\end{array}
$$

Podemos formular estos axiomas en el lenguaje Q, escribiendo

a'	en vez de 0
x'	en vez de x
x''	en vez de y
$f^{*\prime}$	en vez de S
$f^{**\prime}\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2$	en vez de $\mathrm{t}_1 + \mathrm{t}_2$, donde t_1 y t_2 son términos de Q
$f^{**\prime\prime}\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2$	en vez de $\mathrm{t}_1 \cdot \mathrm{t}_2$
$F^{**\prime}\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2$	en vez de $\mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2$
$\sim F^{**\prime}\mathrm{t}_1\mathrm{t}_2$	en vez de $\mathrm{t}_1 \neq \mathrm{t}_2$
$\sim\, \wedge\, \mathrm{v} \sim$	en vez de $\forall \mathrm{v}$, donde v es una variable de Q

y borrando los corchetes. Por ejemplo, el axioma 3 se convierte en

$$\wedge x'(\sim F^{**\prime}x'a' \supset \sim \wedge x'' \sim F^{**\prime}x'f^{*\prime}x'')$$

Reescribiendo los axiomas de esta manera, se convierten en fbfs cerradas de Q, y si los añadimos como axiomas a $\mathrm{SQ}^{=}$ obtenemos una teoría de primer orden, a la que llamaremos 'R'.

Daremos por ya establecido que R tiene su modelo propuesto, M, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales; y mostraremos que también tiene un modelo [normal] que no es isomorfo respecto a su modelo propuesto, es decir, que tiene un modelo [normal] no-clásico.

Para que resulte de más fácil lectura, usaremos, en vez del lenguaje Q, el simbolismo matemático habitual, escribiendo el numeral 1 en lugar de $f^{*\prime}a'$, el numeral 2 en lugar de $f^{*\prime}f^{*\prime}a'$, y así sucesivamente: también escribiremos c en lugar de a''.

Sea R′ la teoría de primer orden que tiene como axiomas específicos suyos todos los axiomas específicos de R y también las siguientes fórmulas de Q (una por cada número natural):

$$c \neq 0$$
$$c \neq 1$$

$$c \neq 2$$
$$c \neq 3$$
.....
.....

Todo conjunto finito de estos nuevos axiomas tiene un modelo. Por ej., todo elemento del subconjunto $\{c \neq 0, c \neq 1, c \neq 2\}$ resulta verdadero si se considera que 'c' denota el número 3. En general [suponiendo que R tiene su modelo propuesto], todo subconjunto finito del conjunto de los axiomas específicos de R′ tiene un modelo. Por lo tanto, en virtud del Teorema de Compacidad (45.20) R′ tiene un modelo. Puesto que R′ es una teoría de primer orden con identidad (y consistente, puesto que tiene un modelo), por 47.2 tiene un modelo normal, al que llamaremos M′.

Tanto M como M′ son modelos de R. Pero no son isomorfos. Supongamos que lo son. Entonces habrá una correspondencia uno a uno (1—1) entre D = 0, 1, 2, ..., que es el dominio del modelo clásico M, y D′, que es el dominio de M′, correspondencia que satisface las condiciones de isomorfismo. Supongamos que, en tal correspondencia uno a uno (1—1), d'_0 corresponde a 0, d'_1 a 1, d'_2 a 2, y así sucesivamente, en donde d'_0, d'_1, d'_2, ... son elementos de D′. Puesto que M asigna los números naturales 0, 1, 2, ... a los numerales 0, 1, 2, ... de R, bajo el isomorfismo M′ que hemos supuesto asignará a los numerales de R los elementos d'_0, d'_1, d'_2, ... Pero entonces ¿qué asigna M′ a la constante c? Supongamos que asigna a c un objeto d′. Puesto que M′ es un modelo normal de los axiomas de R′, d′ no puede ser idéntico a ninguno de los d'_0, d'_1, d'_2, ... Pero esto es imposible, puesto que d′ tiene que ser un elemento de D′, y d'_0, d'_1, d'_2, ... agotan la pertenencia a D′. Luego el supuesto de que M y M′ son isomorfos lleva a contradicción. Luego R tiene un modelo no-clásico.

Consideraremos R meramente como un ejemplo. Resulta evidente que podemos ejecutar esta maniobra sobre *cualquier* teoría de primer orden con identidad que se proponga como una axiomatización de (cualquier parte de) la aritmética: si la teoría tiene su modelo propuesto, entonces también tiene su modelo normal que no es isomorfo respecto a su modelo propuesto. Luego:

48.4 *Si una teoría de primer orden de la aritmética (con identidad) tiene su modelo propuesto, entonces tiene también un modelo normal que no es isomorfo respecto a su modelo propuesto*

Este resultado se debe a Skolem (ver, p. ej., sus artículos de 1933 y 1934). Henkin (1950) hace una presentación muy sencilla del argumento.

La teoría de los modelos no-clásicos de la aritmética se conoce por el nombre de *aritmética no-clásica.* Abraham Robinson, utilizando una maniobra semejante sobre un sistema formal de la teoría de los números reales, ha desarrollado recientemente una teoría de *análisis no-clásico*[16], que será consistente si lo es la teoría de los números reales. En este desarrollo ha hecho que los infinitesimales sean dignos de todo respeto.

49. Implicaciones filosóficas de algunos de estos resultados

49.1 *Ninguna teoría de primer orden puede tener como único modelo suyo un modelo cuyo dominio sea el conjunto de los números naturales*

Demostración. Toda teoría de ese tipo que tenga siquiera un modelo es consistente. Luego, por la demostración del lema clave de la demostración de completud, tiene un modelo cuyo dominio es el conjunto de los términos cerrados de la teoría. Los términos cerrados son símbolos, no números.

49.2 *Sea K cualquier teoría de primer orden. Fijamos de la forma usual el sentido de las conectivas y cuantificadores. Dejamos que el sentido de otras expresiones de K sea determinado (en la medida en que ello es posible) por los axiomas de K. Entonces, aunque K tenga una cantidad enumerable de axiomas, éstos no nos pueden obligar a interpretar ningún símbolo predicativo de K como si significara 'es un número natural', y no nos pueden obligar a interpretar ninguna expresión de K como si fuera el nombre de un número natural*

Demostración. Si K tiene siquiera un modelo, tiene un modelo cuyo dominio no son números, sino un conjunto de términos cerrados.

49.3 *Como en el caso de* 49.2, *añadiendo además F**′ interpretado como si significara identidad en el dominio del modelo*

Demostración. Si K tiene siquiera un modelo, tiene un modelo normal cuyo dominio no son números, sino un conjunto de términos cerrados.

49.4 *Si cualquier teoría de primer orden (con identidad) que intente ser una axiomatización de la teoría de números tiene siquiera un mode-*

lo, tiene un modelo que no es siquiera isomorfo respecto a su modelo propuesto

Se trata, en otras palabras, del mismo 48.4.

No obstante:

49.5 *El significado (normal) de cualquier adjetivo numeral individual que rellenara el hueco de una oración de la forma 'Hay exactamente... cosas que tienen la propiedad F' puede definirse en términos del lenguaje de Q, si interpretamos de la forma usual los cuantificadores y conectivas y además interpretamos algunos símbolos predicativos diádicos de Q como si significaran '='*

Demostración. Mostramos en primer lugar cómo se traducen 'Hay exactamente una cosa que tiene la propiedad F' y 'Hay exactamente dos cosas que tienen la propiedad F' en términos del lenguaje de Q, interpretado como en el enunciado del teorema. Escribimos las fórmulas de Q con notación abreviada, e indicamos a continuación cómo hay que desarrollar las abreviaturas.

A. Hay exactamente una cosa que tiene la propiedad F

$$\vee x_1(Fx_1 \wedge \wedge x_2(Fx_2 \supset x_2 = x_1))$$

B. Hay exactamente dos cosas que tienen la propiedad F

$$\vee x_1 \vee x_2((((Fx_1 \wedge Fx_2) \wedge x_1 \neq x_2) \wedge \wedge x_3(Fx_3 \supset (x_3 = x_1 \vee x_3 = x_2))))$$

Desarrollos

$\vee$ v	$\sim \wedge$ v $\sim$
x_1	x'
x_2	x''
x_3	x'''

F. Cualquier símbolo predicativo monádico de Q

(A $\wedge$ B)	$\sim$(A $\supset \sim$ B)
(A $\vee$ B)	($\sim$ A $\supset$ B)
u = v	$F^{**\prime}$uv
u $\neq$ v	$\sim F^{**\prime}$uv

En vez de 'Hay exactamente n cosas que tienen la propiedad F', en donde n es un adjetivo numeral, y el número natural que le corresponde es mayor que 2, escribiremos:

$$\vee x_1 \ldots \vee x_n(Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \wedge x_1 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_1 \neq x_n \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n \wedge \wedge x_{n+1}(Fx_{n+1} \supset (x_{n+1} = x_1 \vee x_{n+1} = x_2 \vee \ldots \vee x_{n+1} = x_n)))$$

rellenando los huecos y añadiendo tantos paréntesis como sea necesario.

Suponiendo que el significado (normal) de los adjetivos numerales en otras oraciones y frases, incluyendo las interrogativas e imperativas, es el mismo que su significado en oraciones de la forma 'Hay exactamente... cosas que tienen la propiedad F', obtenemos el sorprendente resultado que establece que:

49.6 *Cualquier adjetivo numeral, pero ningún nombre numeral, puede definirse sin ambigüedad en el lenguaje Q, interpretado solamente respecto de los cuantificadores, las conectivas y un símbolo de identidad*

La Paradoja de Skolem

Podemos formular la teoría de conjuntos como una teoría de primer orden. Para representar la $\in$ de la pertenencia a un conjunto elegimos algún símbolo predicativo diádico de Q, y después añadimos a SQ o $SQ^=$ axiomas que, en su interpretación propuesta, sean axiomas de la teoría de conjuntos. No es seguro que ninguna de las axiomatizaciones habituales de la teoría de conjuntos sea consistente. Luego no es seguro que ninguna formalización de primer orden de la teoría de conjuntos tenga su modelo propuesto. Pero si lo tiene, entonces el dominio del modelo es el conjunto de todos los conjuntos manejados por la teoría. Uno de los teoremas de la teoría clásica de conjuntos es que existe un conjunto que tiene como elementos una cantidad no numerable de conjuntos (por ej., el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales es un conjunto de ese tipo). Luego el modelo propuesto debe tener un dominio no-numerable. Pero, por el Teorema de Löwenheim-Skolem (45.18), cualquier teoría de primer orden que tenga un modelo, tiene un modelo *enumerable* (y, si se trata de una teoría de primer orden con identidad, tiene un modelo *normal* numerable).

Luego la llamada Paradoja de Skolem es la siguiente: Existe una teoría de primer orden que si tiene su modelo propuesto, tiene un modelo no-numerable. Pero si además tiene su modelo propuesto, tiene un modelo numerable, siquiera uno en el que '=' significa '='.

La Paradoja de Skolem no es una contradicción, y en este punto de nuestro libro resulta difícil considerarlo siquiera una paradoja. Sea K una axiomatización de primer orden de la teoría de conjuntos, y sea U

un teorema de K que en su interpretación propuesta significa 'Hay una cantidad no-numerable de conjuntos'. Entonces si K tiene un modelo, existe un modelo de K en el cual U no dice que haya una cantidad no-numerable de conjuntos, o siquiera que haya una cantidad no-numerable de cosas de cualquier tipo. Tal y como muestran nuestras demostraciones de los metateoremas correspondientes, si K tiene un modelo, entonces un modelo normal de K hará que U hable, no precisamente de conjuntos, sino de términos cerrados de K. Puesto que en ese modelo U será verdadero, y sólo hay una cantidad numerable de términos cerrados de K, U no significará en ese modelo: 'Hay una cantidad no-numerable de términos cerrados': más bien expresará alguna verdad acerca de los términos cerrados de K. Y si hay un modelo de K, con un dominio numerable, en el que U hable acerca de conjuntos, ni siquiera entonces en el modelo U significará 'Hay una cantidad no-numerable de conjuntos', sino alguna otra cosa.

50. Un sistema formal de la lógica de predicados monádicos de primer orden: el sistema SQ^M. Demostraciones de su consistencia, completud semántica y decidibilidad

La lógica de predicados monádicos es la lógica de los predicados monoargumentales. No aparecen en ella predicados con dos o más lugares de argumentos.

El lenguaje M

El lenguaje M es igual que el lenguaje Q *salvo en que no tiene símbolos funcionales y sus únicos símbolos predicativos son símbolos predicativos monádicos.* Las definiciones de fbf, etc., son iguales que las de Q, excepto en que sólo las constantes individuales y variables individuales son términos, y la cláusula 2 de la definición de fbf cambia hasta quedar:

2'. Si F es un símbolo predicativo y t es un término, entonces Ft es una fbf que es atómica.

Semántica de M

Igual que la de Q.

El sistema SQ^M

Los axiomas de SQ son aquellas fbfs *de M* que son axiomas en virtud de cualquiera de los esquemas SQ 1-7. SQ^M tiene como única regla de inferencia el Modus Ponens para $\supset$.

50.1. *Todo teorema de SQ^M es lógicamente válido*

Demostración. Todo teorema de SQ^M es un teorema de SQ, y todo teorema de SQ es lógicamente válido.

50.2. *SQ^M es constante*

Demostración. A partir de 50.1, mediante un argumento ya conocido.

50.3. (*Teorema de completud semántica para SQ^M*) *Toda fbf de M lógicamente válida es un teorema de SQ^M*

Demostración. Por la completud semántica de SQ, toda fbf de M lógicamente válida es un teorema de SQ. Luego para demostrar la completud semántica de SQ^M basta con mostrar que para cualquier demostración en SQ de una fbf A de M hay una demostración en SQ^M de A.

Sea A una fbf de M que es lógicamente válida. Entonces existe una demostración en SQ de A. Sea $A_1, \ldots, A_m$ una demostración en SQ de A (luego A_m es A). Siempre que aparezca en esta demostración un símbolo predicativo n-ádico seguido por n-términos, con $n > 1$, lo reemplazamos, a él y a sus términos, por el símbolo proposicional p'. El resultado será una demostración en SQ^M de A. Ya que si A_i' es el resultado de reemplazar por p' en A_i cualquier símbolo predicativo poliádico, y sus términos asociados, entonces si A_i es un axioma de SQ, A_i' será un axioma de SQ^M; y si A_k es una consecuencia inmediata en SQ de A_j y $A_j \supset A_k$, entonces A_k' es una consecuencia inmediata en SQ^M de A_j' y $(A_j \supset A_k)'$, porque $(A_j \supset A_k)'$ es $(A_j' \supset A_k')$. Luego cualquier fbf de M lógicamente válida tiene una demostración en SQ^M y es, por lo tanto, un teorema de SQ^M.

50.4. *SQ^M no es completo respecto de la negación*

Demostración. Igual que en el caso de 46.4, reemplazando 'SQ' por 'SQ^M'.

50.5. *SQ^M no es sintácticamente completo*

Demostración. Igual que en el caso de 46.5, sustituyendo 'SQ' por 'SQ^M' y 'Q' por 'M' a lo largo de la demostración.

Decidibilidad de SQ

Esquema de la demostración

Sea A una fbf cualquiera de M.

Por 40.8, A es lógicamente válida sii A^c (un cierre cualquiera de A) lo

es. Luego para comprobar la validez lógica de A basta con comprobar la validez lógica de A^c.

Mostraremos —50.8— que una fbf cerrada de M que tenga k símbolos predicativos distintos es lógicamente válida sii 2 k-válida.

Por 40.22, existe un método efectivo para determinar la k-validez de cualquier fórmula de Q, y por lo tanto de cualquier fórmula de M.

De ello se sigue que existe un método efectivo para determinar la validez lógica de cualquier fórmula de M.

Por 50.1 y 50.3, una fórmula de M es lógicamente válida sii es un teorema de SQ^M.

Luego SQ^M es decidible.

El núcleo central de la demostración es el Teorema 50.8, en el que el problema de la decisión para dominios infinitos se reduce a un problema para dominios finitos. 50.6 y 50.7 son lemas de 50.8.

50.6 *Si una fbf cerrada de M es falsa para una interpretación I que tenga un dominio de k elementos, entonces es falsa para alguna interpretación I' que tenga un dominio de* $k+1$ *elementos*

(De hecho, 50.6 vale para fbfs cualesquiera de Q, pero lo demostraremos solamente para fbfs cerradas de M.)

Demostración. Sea A una fbf cerrada de M con n símbolos predicativos distintos, que es falsa para alguna interpretación I que tiene un dominio de k elementos.

Sean $F_1, \ldots, F_n$ los símbolos predicativos distintos en A y asígneles I las propiedades $P_1, \ldots, P_n$. Sea D el dominio de I.

Mostraremos que hay una interpretación I', con un dominio D' de $k+1$ elementos, para el cual A es falsa

Hay que construir I' a partir de I de la siguiente forma:

1. El dominio de I' tiene que ser el dominio de I con un objeto adicional, que es b.
2. Si d' es un elemento de D' y $d' \neq b$, entonces el elemento de D que corresponde a d' tiene que ser el mismo d'. Si $d' = b$ entonces el elemento de D que corresponde a d' tiene que ser algún elemento (elegido al azar) de D.
3. Si I asigna un elemento d de D a una constante c, entonces I' también asigna d a c.

4. I′ asigna a los símbolos predicativos $F_1, \ldots, F_n$ las propiedades $P'_1, \ldots, P'_n$, definidas de la siguiente forma:
   P'_1 pertenece a un elemento d′ de D′ sii P_1 pertenece al elemento de D que corresponde a d′. $P'_2, \ldots, P'_n$ se definen de igual manera, pero en términos de las propiedades $P_2, \ldots, P_n$.
5. I′ hace las mismas asignaciones que I de valores de verdad a los símbolos proposicionales de M.

Es fácil mostrar que una secuencia s′ satisface una fórmula A para I′ sii la correspondiente secuencia s satisface A para I. La demostración es por inducción sobre el número de conectivas y cuantificadores de A.

Ahora, *ex hypothesi*, A es falsa para I. Luego ninguna secuencia s la satisface para I. Luego ninguna secuencia s′ satisface A para I′ es decir, que A es falsa para I′. Pero I era una interpretación cualquiera con un dominio que tenía un número cualquiera k de elementos (naturalmente $k > 0$). Luego para cualquier interpretación con un dominio de un número cualquiera de elementos en el cual una fbf cerrada cualquiera de M es falsa, existe alguna interpretación con un elemento más en su dominio para la cual esa fbf es falsa.

Q.E.D.

La idea central de la demostración del siguiente teorema es ésta: Si tenemos k propiedades monádicas distintas, y consideramos sólo objetos tales que cada una de las propiedades pertenece o no a cada uno de los objetos, entonces, sin que importe cuántos objetos haya en el dominio que consideramos, el número mayor de diferentes clases lógicamente posibles en las cuales k propiedades monádicas pueden en principio clasificar cosas de forma que cada cosa esté en una, y sólo en una, clase, es exactamente 2^k. (Si hay menos de 2^k objetos, entonces al menos una de las clases será vacía, pero estamos considerando el número de casilleros posibles, y no el número de casilleros que tienen alguna cosa en ellos).

Por ejemplo: Supongamos que tenemos tres propiedades monádicos P_1, P_2 y P_3. Entonces el mayor número posible de clases en las que esas tres propiedades pueden en principio clasificar cosas (de forma que cada cosa esté en una, y sólo en una, clase) es $2^3 = 8$. Las clases son (escribiendo 'son P_1' en vez de 'tienen la propiedad P_1' y 'son $\overline{P_1}$' en vez de 'no tienen la propiedad P_1') las clases

1. Cosas que son $\underline{P}_1$ y P_2 y P_3.
2. Cosas que son P_1 y $\underline{P}_2$ y P_3.
3. Cosas que son $\underline{P}_1$ y $\underline{P}_2$ y P_3.
4. Cosas que son P_1 y P_2 y $\underline{P}_3$.
5. Cosas que son $\underline{P}_1$ y P_2 y $\underline{P}_3$.
6. Cosas que son P_1 y $\underline{P}_2$ y $\underline{P}_3$.
7. Cosas que son $\underline{P}_1$ y $\underline{P}_2$ y $\underline{P}_3$.
8. Cosas que son P_1 y P_2 y P_3.

Si sólo podemos manejar esas tres propiedades monádicas, el número mayor de clases lógicamente posibles —sin que importe cuántos objetos haya— en las que se pueden clasificar cosas mediante ellas (de forma que cada cosa esté en una, y sólo en una, clase) es $2^3 = 8$. Y, en general, el número de formas en las que k propiedades monádicas pueden en principio ordenar cosas es 2^k.

Luego, para decirlo informalmente, si hemos comprobado que una fórmula con k símbolos predicativos monádicos distintos (y ningún otro símbolo predicativo) es verdadera para algo en cualquiera de las 2^k clases respectivas, entonces no tenemos que tener en cuenta ninguna otra posibilidad adicional que resulte revelante (el número de casilleros no aumenta con el número de objetos que hay que colocar en ellos).

Una fórmula de M que sea lógicamente válida puede ser considerada como una variedad acerca de *clases abstractas cualesquiera* de cosas; y al mostrar que la lógica de predicados monádicos es decidible estamos mostrando al mismo tiempo que el cálculo simple de clases es decidible.

50.7 *Si una fbf cerrada de M con k símbolos predicativos distintos es falsa para alguna interpretación I, entonces es falsa para alguna interpretación I' con un dominio de como máximo 2^k elementos*

Demostración. Sea C una fbf cerrada de M con *k* símbolos predicativos distintos, que es falsa para alguna interpretación I.

Mostraremos que existe una interpretación I' con un dominio de como máximo 2^k elementos para la cual C es falsa.

Sean $F_1, \ldots, F_k$ los símbolos predicativos distintos en C, y asígneles I respectivamente las propiedades $P_1, \ldots, P_k$.

Distribuimos los elementos del dominio D de I en clases *no vacías* que no solapan entre sí, definidas mediante las propiedades $P_1, \ldots, P_k$ tal y como se ejemplifica informalmente en los parágrafos que preceden

a esta demostración. Como sucedía entonces, puede haber un máximo de 2^k clases de ese tipo. (Si hay menos de 2^k, es porque alguna combinación de propiedades no pertenece a ningún elemento de D.)

I′ toma estas clases como los elementos de su dominio D′.

Ejemplo: Sea C la fbf cerrada $\wedge x(Fx \supset Gx)$. Sea I una interpretación cuyo dominio es el conjunto de todos los animales y que asigna la propiedad de *ser un mamífero* a *F* y la propiedad de *ser una vaca* a *G*. (Luego C es falsa para I.) Entonces I′ toma como elementos de su dominio D′ las clases siguientes:

1. La clase de todos los animales que son mamíferos y vacas, es decir, la clase de las vacas.
2. La clase de todos los animales que son mamíferos pero que no son vacas.
3. La clase de todos los animales que no son mamíferos ni vacas.

La clase de todos los animales que no son mamíferos pero que son vacas no es un elemento del dominio de I′, puesto que es una clase vacía.

Sea P'_1 la propiedad definida de la forma siguiente: La propiedad P'_1 pertenece a un elemento d′ de D′ sii la propiedad P_1 pertenece a todos los elementos d′ de D′ sii la propiedad P_1 pertenece a todos los elementos de d′ (recuérdese que d′ es una clase).
$P'_2, \ldots, P'_k$ se definen de igual manera, pero en términos de las propiedades $P_2, \ldots, P_k$ respectivamente. (Ejemplo siguiente.)

I′ asigna $P'_1, \ldots, P_k'$ a los símbolos predicativos $F_1 \cdots F_k$ respectivamente, y propiedades cualesquiera, definidas para D′, a los restantes símbolos predicativos de M.

Ejemplo: Sean C e I como en el ejemplo anterior. Entonces I′ asigna a *F* la propiedad de *tener sólo mamíferos como elementos* y a *G* la propiedad de *tener sólo vacas como elementos.*

Si I asigna un elemento d de D a una constante c, entonces I′ asigna a c la clase en D′ a la que pertenece d.

Ejemplo: Sea I igual que antes, C sea Gc_1, y asigne I a la constante c_1 una vaca determinada, por ejemplo Blanquita. Entonces I′ asigna a c_1 la clase en D′ a la que pertenece Blanquita, es decir, la primera clase de la lista anterior, es decir, la clase de todos los animales que son mamíferos y vacas, es decir, la clase de las vacas.

Finalmente I' hace la misma asignación que I de valores de verdad a los símbolos proposicionales.

Hay que señalar que de nuestras definiciones se sigue que si d tiene la propiedad $P_i (1 \leqslant i \leqslant k)$, entonces todo elemento de d tiene la propiedad P_i, y si d no tiene la propiedad P_i, entonces ningún elemento de d' tiene la propiedad P_i.

Resulta fácil mostrar que una secuencia s satisface una fórmula A para I sii la secuencia s' satisface A para I', en donde s' es la secuencia obtenida al reemplazar cada término d_i de s por el término d'_i de D', al que pertenece d_i. La demostración es por inducción sobre el número de conectivas y cuantificadores de A.

Ahora, *ex hypothesi*, C es falsa para I. Luego ninguna secuencia s la satisface para I. Luego ninguna secuencia s' la satisface para I'. Pero esto significa que ninguna secuencia de elementos de D' satisface C para I'.

Luego C es falsa para I'. Luego, para cualquier interpretación con un dominio de una dimensión cualquiera para el cual una fbf cerrada cualquiera de M con *k* símbolos predicativos distintos es falsa, existe una interpretación con un dominio de como máximo 2^k elementos para la cual la fbf es falsa.

Q.E.D.

50.8. *Una fbf cerrada de M con k símbolos predicativos distintos es lógicamente válida sii es 2^k-válida*

Demostración. Sea C una fbf cerrada de M con *k* símbolos predicativos distintos.

1. Obviamente si C es lógicamente válida, C es 2^k-válida.

2. Supongamos que C no es lógicamente válida. Entonces es falsa para alguna interpretación I. Entonces, por 50.7 es falsa para alguna interpretación I' con un dominio de como máximo 2^k elementos. Entonces, por 50.6, aplicado tantas veces como resulte necesario, es falsa para alguna interpretación como un dominio de exactamente 2^k elementos, es decir, no es 2^k-válida. Luego si C es 2^k-válida, es lógicamente válida.

De lo que se sigue la decidibilidad de SQ^M, como sucede en el *Esquema de la demostración* de las pp. 238-239. Luego:

50.9. *SQ^M es decidible*

NOTAS A LA TERCERA PARTE

[1] Es decir, una aparición del cuantificador. Lo mismo sucede en todos los demás sitios.

[2] O relaciones entre.

[3] Este tipo de semántica se originó con Tarski. Véase, por ej., Tarski (1923-38), artículo VIII) (que fue comenzado más o menos en 1931) o, para una presentación más sencilla, Tarski y Vaugh (1956, pp. 84-5).

[4] Pero con esta extensión: pueden establecerse entre fórmulas que para una interpretación dada no son ni verdaderas ni falsas.

[5] Si A es falsa para I, entonces $\wedge vA$ es falsa para I. Pero la conversa no es verdadera; si A contiene una variable libre, $\wedge vA$ puede ser falsa para I mientras que A no es ni verdadera ni falsa para I.

[6] Puede omitirse en una primera lectura.

[7] Se usa en la demostración de la completud, aunque puede omitirse en una primera lectura.

[8] Se usa en la demostración de la decidibilidad de un sistema de lógica de predicados monádicos, en la secc. 50.

[9] Para comprobar que no es lógicamente válida, tómense como dominio los números naturales, y asígnese a Fxy el significado de $x > y$.

[10] Hemos elegido este conjunto de axiomas porque con él podemos obtener algunos otros conjuntos de axiomas de la lógica de predicados no tienen esta propiedad.

[11] Esta es, en esencia, la demostración de Henkin (Henkin, 1947).

[12] No hay ninguna reclamación de propiedad en este 'nuestro'. La idea esencial se debe a Frederic B. Fitch (1938, pp. 144-5), y pueden encontrarse sistemas tipo Fitch en Quine (1940), Rosser (1953), Mates (1965) y Margaris (1967).

[13] Es decir, las variables que siguen *inmediatamente* a los cuantificadores.

[14] Este conjunto de axiomas se debe a R. M. Robinson (1950), y a veces recibe el nombre de 'aritmética de Robinson', o 'Q'.

[15] Si M y M' son modelos isomorfos de una teoría K de primer orden, entonces una fórmula A de K es verdadera para M sii es verdadera para M'.

[16] La *Aritmética* es la rama de la Matemática que se ocupa de los números naturales y de otros conjuntos numerables de objetos. El *Análisis* se ocupa de los números reales y de conjuntos no-numerables.

CUARTA PARTE

Lógica de Predicados de Primer Orden: Indecidibilidad

51. Algunos resultados acerca de la indecidibilidad[1]

En esta sección demostramos algunos resultados acerca de la decidibilidad utilizando únicamente la noción informal de método efectivo explicada en la secc. 7.

Nos ocuparemos en primer lugar de establecer un tope máximo para el número de métodos efectivos que existen.

En general se está de acuerdo en que cualquier método efectivo (en lógica y matemática) debe ser susceptible de ser detallado sin ambigüedad mediante una cadena finita de palabras y/o símbolos. Si no pudiera ser detallado finitamente, entonces ni siquiera podría ser expresado como un programa de un ordenador real o posible, y por lo tanto no sería un método de computación.

Formularemos un supuesto más fuerte, el de que algún lenguaje existente (como el español, francés inglés o alemán), junto con los símbolos (interpretados) de la lógica y la matemática disponibles, y complementado, si fuera necesario, con un conjunto finito de nuevas palabras y/o nuevos símbolos (interpretados) es adecuado para detallar sin ambigüedades todos los métodos afectivos.

Para justificar *parcialmente* este supuesto (que es una forma primitiva de la Tesis de Church: cf. secc. 52, más adelante), diremos que:

1. No podemos pensar en ningún método efectivo (en lógica y matemática) que no pudiera detallarse en principio mediante *cualquier* extensión finita de *cualquier* lenguaje natural existente, complementado como un simbolismo lógico y matemático.
2. En la medida en que la lógica y las matemáticas se hallan implicadas, todo lo que puede decirse en alguno de los lenguajes naturales existentes puede decirse en uno determinado de entre ellos, como el español, el inglés, el francés o el alemán.

Puesto que, en este caso, el español es un lenguaje natural tan bueno como otro cualquiera, estableceremos el supuesto de la siguiente forma:

51.1. *Supuesto. El español, complementado —si es necesario— con un conjunto finito de símbolos (interpretados) y un conjunto finito de nuevas palabras o de palabras tomadas en préstamo de otros lenguajes, es adecuado para detallar sin ambigüedad todos los métodos efectivos*

Por el Supuesto 51.1, para cada uno de los diferentes métodos efectivos existe al menos una cadena (finita) diferente de palabras en español, o en español con las adiciones mencionadas, que lo detalla sin ambigüedad. Dicha cadena está compuesta de letras y símbolos tomados de un alfabeto finito, y sólo existe una cantidad numerable y finita de cadenas de símbolos de un alfabeto finito (cf. la demostración de 14.1). Luego:

51.2. *Sólo hay una cantidad numerable de métodos efectivos*

Podría objetarse que una cadena es susceptible en principio de ser interpretada de infinitas maneras, y que por lo tanto, aunque sólo exista una cantidad numerable de cadenas diferentes, podrían en principio utilizarse para decir una cantidad no-numerable de cosas diferentes. Sin embargo, a esta objeción atiende nuestra exigencia (Supuesto 51.1) de que para cada método efectivo existe una especificación *que no es ambigüa*. Una cadena que pueda ser interpretada como una descripción de un método efectivo determinado, o como una descripción de otro que sea completamente diferente al primero, no es una especificación de ambos métodos libre de ambigüedad. Por lo tanto, cuando estamos calculando cuántos métodos efectivos existen, la Suposición 51.1 nos permite ignorar las cadenas que tengan más de una interpretación.

51.3. *Existen conjuntos de números naturales que no son efectivamente enumerables*

Demostración. Existe una cantidad no-numerable de subconjuntos del conjunto de los números naturales (secc. 11). Por 51.2, existe sólo una cantidad numerable de métodos efectivos. Cualquier método efectivo para la enumeración de un conjunto de números naturales enumera precisamente un conjunto de números naturales. Luego existen algunos conjuntos de números naturales para cuya enumeración no existe ningún método efectivo.

Este es un resultado que hay que destacar. Los conjuntos que no pueden ser efectivamente enumerados son conjuntos *numerables*, no conjuntos no-numerables; y son conjuntos de números naturales, luego para cada conjunto, se puede hablar de 'el número más pequeño del conjun-

to', 'el siguiente número más pequeño del conjunto', 'el n-ésimo número más pequeño del conjunto', y así sucesivamente. Sin embargo, a pesar de esto, no existe ningún método efectivo que permita enumerar sus elementos.

51.4. *Existen conjuntos indecidibles de números naturales*

Demostración. Existe una cantidad no-numerable de subconjuntos del conjunto de los números naturales, pero sólo una cantidad numerable de métodos efectivos. Luego existen conjuntos de números naturales para los que no existe ningún método efectivo que permita decir si un número natural cualquiera es un elemento o no.

Definición. El *complemento* de un conjunto S es el conjunto de todas las cosas que no son elementos del conjunto S. El *complemento de un conjunto S respecto a, o relativo a, un conjunto T* es el conjunto de todos los elementos de T que no son elementos de S.

Si S es un conjunto de números naturales, por complemento relativo de S entenderemos el conjunto de todos los números naturales que no son elementos de S [en símbolos: $\overline{S}$].

51.5. *Un conjunto de números naturales es decidible sii tanto él como su complemento relativo son efectivamente enumerables* [Post, 1944]

Demostración. Sea S un conjunto de números naturales.

1. Supongamos que S es decidible.

(*a*) Si S es vacío, entonces S es efectivamente enumerable (por convención) y $\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$ es una enumeración efectiva de $\overline{S}$. De igual manera sucede si $\overline{S}$ es vacío.

(b) Si S no es vacío, entonces $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ es una enumeración efectiva de S, en donde a_1 es el número natural más pequeño de S, a_2 es el siguiente más grande en S, y así sucesivamente; y $\langle b_1, b_2, b_3, \ldots \rangle$ es una enumeración efectiva de $\overline{S}$, en donde b_1 es el número natural más pequeño que no está en S, b_2 el siguiente más grande que no está en S, y así sucesivamente. (Ambos conjuntos pueden ser finitos.) Estas enumeraciones son efectivas porque (por nuestro supuesto) S es decidible. [Informacionalmente: Comprobamos 0 para ver si está en S. Si está, lo establecemos como tal. Si no está, lo establecemos como elemento de $\overline{S}$. (Puesto que S es decidible, existe un método efectivo para decir si 0 es un elemento de S o no.) Repitamos el procedimiento para 1. Y así suce-

sivamente. Las secuencias resultantes son enumeraciones efectivas de S y de $\overline{S}$.]

Luego si S es decidible, S y $\overline{S}$ son efectivamente enumerables.

2. Supongamos que S y $\overline{S}$ son efectivamente enumerables.

(*a*) Si S es finito, S es decidible (secc. 8). Si $\overline{S}$ es finito, $\overline{S}$ es decidible. Cualquier método efectivo para determinar la pertenencia a $\overline{S}$ puede convertirse en un método efectivo para determinar la pertenencia a S adoptando simplemente la respuesta contraria a la proporcionada por la comprobación de la pertenencia a $\overline{S}$. Luego si $\overline{S}$ es finito, S es decidible.

(*b*) Supongamos que tanto S como $\overline{S}$ son ambos infinitos. Sean $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ y $\langle b_1, b_2, b_3, \ldots \rangle$ enumeraciones afectivas de S y $\overline{S}$ respectivamente. Entonces cualquier número natural *n* aparece en una o en otra, pero no en ambas, de dichas enumeraciones. Para comprobar la pertenencia de *n* a S, consideremos ordenadamente los términos $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ estando al tanto de si están en S o en $\overline{S}$. Más tarde o más temprano *n* tendrá que aparecer en esta lista, y entonces se sabrá si es un complemento de S o de $\overline{S}$.

Luego si tanto S como $\overline{S}$ son efectivamente enumerables, S es decidible.

Definición. Una función de *n* argumentos de números naturales a números naturales es total sii su dominio es el conjunto de *todas* las *n*-tuplas ordenadas de números naturales (si $n=1$, su dominio es el conjunto de *todos* los números naturales).

Definición. Una función de *n* argumentos de números naturales a números naturales es *computable* sii es total y además existe un método efectivo que permita computar el valor de la función para cada elemento de su dominio.

Ejemplos:

La función suma para números naturales es una función total, y existe un método efectivo para computar la suma de dos números naturales cualesquiera, luego la función suma para números naturales es una función computable. La función producto para números naturales es otra función computable.

51.6. *Existe sólo una cantidad enumerable de funciones computables de números naturales a números naturales*

Demostración. Es obvio que existe al menos una cantidad enumerable: consideremos, por ej., la secuencia de funciones definida por las reglas $f_0(x)=x+0$, $f_1(x)=x+1$, $f_2(x)=x+2$, ... Puesto que sólo existe una cantidad numerable de métodos efectivos, existe como máximo una cantidad numerable de funciones computables de números naturales a números naturales. Luego existe precisamente una cantidad enumerable de ellas.

51.7. *Existen funciones totales no-computables de números naturales a números naturales*

Demostración. A cada diferente subconjunto no-vacío del conjunto de los números naturales le corresponde una función total diferente de números naturales a números naturales, esto es, la función cuyo valor para el argumento 0 es el número más pequeño del subconjunto en cuestión, cuyo valor para el argumento 1 es el siguiente número más grande del conjunto, si es que existe uno; y en otro caso es el mismo valor que para el argumento 0; y así sucesivamente. Existe una cantidad no-numerable de subconjuntos no-vacíos del conjunto de los números naturales (omitiendo el conjunto vacío queda todavía una cantidad no-numerable de subconjuntos: cf. 13.6). Luego existe una cantidad no-numerable de esas funciones. Pero hay solamente una cantidad numerable de métodos efectivos. Luego hay funciones totales no-compatibles de números naturales a números naturales.

51.8. *La función total g de números naturales a números naturales, definida anteriormente, no es computable.*

Demostración. Por 51.6, el conjunto de todas las funciones computables de números naturales a números naturales es enumerable. Resulta claro que el conjunto de todas las funciones computables de un argumento de números naturales a números naturales no es finito, luego también es enumerable. Sea $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle$ una enumeración de dicho conjunto (esta enumeración no es efectiva, como demostraremos en 51.9). Sea g la función total de números naturales a números naturales definida mediante la regla

$$\begin{cases} g(n) \text{ si } f_n(n)=0 \\ g(n)=0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Entonces g no es computable. Ya que si lo fuera, sería una de las f_i, por ejemplo f_k. Entonces tendríamos:

$$g(k)=f_k(k) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

Pero por la definición de g si $f_k(k)=0$ entonces $g(k)=1$ y si $f_k(k)\neq 0$ entonces $g(k)=0$. Luego $g(k)\neq f_k(k)$, lo que contradice a (1). Luego g no es computable.

51.9 *El conjunto de las funciones computables de un argumento, de números naturales a números naturales, no es efectivamente enumerable.*

Demostración. Supongamos que no lo fuera. Entonces existiría un método efectivo para, dados números naturales cualesquiera j y k, encontrar la j-ésima función para el argumento k. Luego habría un método efectivo para computar el valor de $f_n(n)$ para cada número natural n. Luego habría un método efectivo para computar el valor de $g(n)$ para cada n, donde g es la función definida en 51.8. Luego g sería computable. Pero g no es computable, tal y como hemos demostrado. Luego el conjunto de las funciones computables con un argumento, de números naturales a números naturales, no es efectivamente enumerable.

Definiciones

Diremos que cualquier sistema formal que satisfaga las siguientes condiciones es un *sistema formal de la aritmética:*

1. Bajo la interpretación propuesta, al menos alguno de sus teoremas expresa verdades de la pura teoría de números.
2. Para cada número natural n existe en el sistema una expresión en alguna forma clásica que, bajo la interpretación propuesta, denota el número n. Llamaremos a esta expresión el *numeral* de n, y lo denotaremos, en el metalenguaje, mediante $\overline{n}$. Por ej., $\overline{3}$ (el numeral del número 3) podría ser '3' o '111' o 'SSS0' o '0‴'.
3. Las fórmulas del sistema son cadenas finitas de símbolos de un alfabeto finito.

Diremos que un sistema formal de la aritmética es *notable* si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. El sistema es consistente.
2. Todo conjunto decidible de números naturales está representado en él, en un sentido de 'representado' que explicaremos a continuación.
3. Una fórmula con variables libres es un teorema sii lo es algún cierre de ella.

Diremos que un conjunto X de números naturales está *representado*

en un sistema formal S sii existe una fórmula A(v) de S con sólo una variable libre v, tal que para cada número natural *n:*

$$\vdash_S A(\bar{n}) \text{ sii } n \in X$$

donde $A(\bar{n})$ es el resultado de sustituir todas las apariciones libres de la variable v en A(v) por el numeral $\bar{n}$. [O, utilizando una notación que ya hemos usado anteriormente: ... sii existe una fórmula A de S con sólo una variable libre v tal que para cada número natural *n:*

$$\vdash_S Av/\bar{n} \text{ sii } n \in X]$$

['$n \in X$' significa '*n* es un elemento del conjunto X'.]

51.10 *Cualquier sistema formal notable de la aritmética es indecidible*

Demostración. Sea S un sistema formal de la aritmética. Cada fórmula A de S determina una función f de la forma siguiente:

$$\begin{cases} f(n)=0 & \text{si la fórmula obtenida al reemplazar todas las apariciones libres de variables en A por el numeral } \bar{n} \text{ es un teorema de S.} \\ f(n)=1 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

La condición 3 de la definición de *sistema formal de la aritmética* asegura que existe una enumeración efectiva de las fórmulas de S: cf. la demostración de 32.11. Sea $\langle A_0, A_1, A_2, \ldots \rangle$ una enumeración efectiva de las fórmulas de S, y sea $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle$ la enumeración correspondiente de las funciones determinadas por las fórmulas $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Sea h la función definida por la regla

$$\begin{cases} h(n)=1 \text{ si } f_n(n)=0 \text{ entonces} \\ h(n)=0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Entonces h no está en la enumeración $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle$. Ya que si estuviera, entonces, para algún número natural k tendríamos $f_k(k)=1$ sii $f_k(k)=0$.

Defininos de la forma siguiente un conjunto H de números naturales:

$$n \in H \text{ sii } h(n)=0$$

Resulta que *si el sistema S es decidible, entonces el conjunto H es decidible;* entonces cada una de las f_i es computable, y el valor de $f_j(k)$ es computable para cualquier par de números naturales j y k; luego h es computable; luego H es decidible.

Pero el conjunto H no está representado en S. Ya que, suponiendo que lo estuviera, entonces, por la definición de representación habría una fórmula A(v) de S tal que

$$\vdash_S A(\bar{n}) \text{ sii } n \in H$$

Pero, por la definición de H, tenemos:

$$n \in H \text{ sii } h(n) = 0$$

Tendríamos entonces:

$$\vdash_S A(\bar{n}) \text{ sii } h(n) = 0$$

Pero entonces la fórmula A(v) determinaría la función h, y entonces h estaría en la enumeración de las funciones que corresponde a la enumeración de las fórmulas de S. Pero hemos mostrado que h no puede estar en esta enumeración. Luego H no puede estar representado en S.

Luego *si S es decidible, entonces existe un conjunto decidible de números naturales que no está representado en S* (esto es, el conjunto H): es decir, si S es decidible, entonces S no es notable. Luego si S es notable, entonces S es indecidible.

Q.E.D.

Numeración de Gödel

Una numeración de Gödel es una asignación de números, llamados 'números de Gödel', a símbolos, secuencias (finitas) de símbolos, y secuencias (finitas) de secuencias (finitas) de símbolos de forma tal que (1) existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números de Gödel y el conjunto de símbolos, secuencias de símbolos, y secuencias de secuencias de símbolos, y (2) dado un símbolo, una secuencia de símbolos, o una secuencia de secuencias de símbolos, existe un método efectivo para encontrar su número de Gödel, y dado un número, existe un método efectivo para descubrir si es un número de Gödel y, si lo es, para descubrir de qué símbolo, secuencia de símbolos, o secuencia de secuencias de símbolos es número de Gödel.

En los sistemas formales clásicos las fórmulas serán ciertas secuencias finitas de símbolos, y las demostraciones serán ciertas secuencias finitas de secuencias finitas de símbolos. Dada una numeración de Gödel para uno de tales sistemas, cada fórmula distinta y cada demostración distinta tendrá su propio número de Gödel, distinto y único.

Existen muchas formas diferentes de asignar números de manera que se consiga un número de Gödel. La siguiente es una de ellas.

A cada símbolo distinto le asignamos como número de Gödel un entero positivo impar distinto, que no sea 1. Por ejemplo, supongamos que los símbolos son 'A', 'B' y 'C': a 'A' le asignamos el número 3, a 'B' el número 5, y a 'C' el número 7.

A una secuencia de símbolos que tenga n términos le asignamos como número de Gödel:

$$2^{s_1} \times 3^{s_2} \times 5^{s_3} \times \ldots + p_n{}^{s_n}$$

donde s_1 es el número de Gödel del primer símbolo de la secuencia, s_2 es el número de Gödel del segundo símbolo de la secuencia, y así sucesivamente. 2, 3 y 5 son los tres primeros números primos, y p_n es el n-ésimo número primo. Por ejemplo, cuando 'A', 'B' y 'C' tienen respectivamente los números de Gödel 3, 5 y 7, del número de Gödel de la secuencia ⟨'C', 'A', 'B'⟩ será

$$2^7 \times 3^3 \times 5^5$$

y el número de Gödel de la secuencia ⟨'B', 'A', 'C', 'C', 'A'⟩ será:

$$2^5 \times 3^3 \times 5^7 \times 7^7 \times 11^3.$$

Repárese en que los símbolos tendrán números de Gödel impares, y las secuencias de símbolos tendrán números de Gödel pares. Las fórmulas se consideran como secuencias, luego una fórmula que conste de un solo símbolo tendrá un número de Gödel distinto del número del símbolo que la constituye.

Finalmente, asignamos números de Gödel a las secuencias de secuencias de símbolos. Supongamos que $e_1, e_2 \ldots, e_m$ son secuencias de símbolos y que los números de Gödel de esas secuencias son respectivamente $g_1, g_2 \ldots, g_m$. Entonces el número de Gödel de la secuencia $\langle e_1, e_2 \ldots, e_m \rangle$ tiene que ser:

$$2^{g_1} \times 3^{g_2} \times \ldots + p_m{}^{g_m}$$

donde p_m es el m-ésimo número primo.

El número de Gödel de una secuencia de secuencias de símbolos será diferente del número de Gödel de cualquier secuencia de símbolos, ya que el exponente de 2 en su factorización prima será un número par, mientras que el exponente de 2 en la factorización prima del número de Gödel de una secuencia de símbolos será impar.

51.11 *Si el conjunto de fórmulas de un sistema formal S es decidible, y existe un método efectivo para establecer si algo es, o no es, una*

demostración en S, entonces el conjunto de los teoremas de S es efectivamente enumerable

Demostración. Sea S un sistema formal que satisface todas las hipótesis del teorema. Puesto que el conjunto de fórmulas de S es decidible, las fórmulas deben ser secuencias finitas de símbolos, y el conjunto de todos los símbolos que aparecen realmente en las fórmulas debe ser decidible. Los símbolos, las secuencias finitas de símbolos, y las secuencias finitas de secuencias finitas de símbolos de este conjunto decidible admiten una numeración de Gödel. La numeración de Gödel, junto con la decidibilidad del conjunto de fórmulas de S aseguran que el conjunto de todas las secuencias finitas de fórmulas de S es efectivamente enumerable. Puesto que existe un método efectivo que permite establecer si algo es o no es una demostración en S, una demostración en S debe tener una longitud finita, y por lo tanto será una secuencia finita de fórmulas de S. Sea $\langle S_1, S_2, S_3, \ldots \rangle$ una enumeración efectiva de todas las secuencias finitas de fórmulas de S. Entonces podemos obtener de la forma siguiente una enumeración efectiva de los teoremas de S: Comprobemos si S_1 es una demostración en S. Si lo es, coloquemos el teorema que demuestra S_1 como primer término de una secuencia de teoremas (que hay que construir). Hagamos después la misma comprobación para S_2. Si es una demostración, colocamos el teorema que demuestra como siguiente término de la secuencia de teoremas (o como primer término, en el caso de que S_1 no fuera una demostración en S). Y así sucesivamente, en la forma que resulta obvia. La secuencia resultante es una enumeración efectiva de los teoremas de S. (Si S no tiene teoremas, entonces la secuencia está vacía. Pero, por convención, una secuencia vacía se considera como si fuera una enumeración efectiva del conjunto vacío, y, por convención, el conjunto vacío es efectivamente enumerable.)

51.12. *Sea S un sistema formal en el que cualquier fórmula con variables libres es un teorema sii hay un cierre cualquiera de tal fórmula. Si el conjunto de las fórmulas de S es decidible y existe un método efectivo para establecer si algo es, o no es, una demostración en S, entonces si S es consistente y completo respecto de la negación, entonces S es decidible*

Demostración. Sea S un sistema formal que satisface todas las hipótesis del teorema. Sea A una fórmula cualquiera de S cuyo carácter de teorema queremos comprobar. Sea A^c un cierre cualquiera de A. Por 51.11 los teoremas de S son efectivamente enumerables. Puesto que S es completo respecto de la negación, o bien A^c o bien la negación de A^c

aparece en tal enumeración. Si aparece A^c, entonces A es un teorema. Si aparece la negación de A^c, entonces, puesto que S es consistente, A^c no es un teorema, y por lo tanto A no es un teorema.

Nota: Si S es absolutamente inconsistente, pero satisface las otras hipótesis, entonces S es decidible. Ya que si S es absolutamente inconsistente entonces los teoremas de S coinciden con las fórmulas de S, y, por hipótesis, el conjunto de fórmulas de S es decidible.

51.13 (*Teorema Generalizado de Gödel*) *Sea S cualquier sistema formal notable de la aritmética. Si S tiene un conjunto decidible de fórmulas y existe un método efectivo para establecer si algo es, o no es, una demostración en S, entonces S es incompleto* (*es decir, no es completo respecto de la negación*)

Demostración. Directamente a partir de 51.12, 51.10, y de la definición de notabilidad.

Si toda fbf cerrada del sistema interpretado es una proposición (verdadera o falsa) de la aritmética, entonces el sistema será incompleto en un sentido semántico: alguna proposición *verdadera* de la aritmética no será un teorema del sistema.

Comentario. Sería un error extraer la conclusión de que 'cualquier axiomatización consistente de la teoría de los números naturales tendrá que fracasar siempre a la hora de captar como teoremas todas las verdades acerca de los números naturales' (se trata de una cita de un libro sobre filosofía de la matemática). La axiomatización que presentamos a continuación es una axiomatización consistente de la teoría de números que capta todas las verdades de la pura teoría de números:

Sistema C

Axiomas: Todas las verdades de la teoría pura de números.
Reglas de inferencia: Ninguna.

(Naturalmente, C no es un sistema *formal*). Se trata más bien de que ningún sistema axiomático consistente *que tenga un conjunto decidible de axiomas* puede captar todas las verdades de la pura teoría de números.

También sería un error concluir que existe *alguna proposición verdadera determinada* de la teoría pura de números que no puede ser nunca un teorema de un sistema consistente. Sea T una proposición verdadera cualquiera de la teoría pura de números. Entonces cualquier sistema que tenga a T como único axioma, y que o bien no tenga reglas de inferencia

o bien carezca de reglas de inferencia que preserven la verdad, será consistente y tendrá a T como teorema.

Para mayor brevedad, llamemos *extensión finita* de SQ [$SQ^=$] a un sistema formal que como máximo se diferencie de SQ [$SQ^=$] en que tiene un conjunto finito de axiomas que son fórmulas de Q pero que no son axiomas de SQ [$SQ^=$].

51.14. *Si alguna extensión finita de SQ* [$SQ^=$] *es indecidible, entonces también lo es SQ* [$SQ^=$]

Demostración. Sea S una extensión finita de SQ. Sean los axiomas de S que no son axiomas de SQ: $A_1 \ldots, A_n$. Entonces $\vdash_S B$ para una fórmula cualquiera B sii $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \vdash_{SQ} B$, en donde $(A \wedge B)$ es una abreviatura de $\sim(A \supset \sim B)$, añadiendo los paréntesis necesarios. Pero por el Teorema de Deducción y su converso [43.1, 43.2] $A \vdash_{SQ} B$ sii $\vdash_{SQ} A \supset B$. Por tanto $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \vdash_{SQ} B$. Luego si SQ fuera decidible, S también lo sería. Luego si S es indecidible, también lo es SQ.

Si en esta demostración escribimos '$SQ^=$' en vez de SQ, obtenemos el siguiente resultado: Si S es un sistema formal que se diferencia de $SQ^=$ como máximo en que tiene un conjunto finito de axiomas que son fórmulas de Q pero que no son axiomas de $SQ^=$, entonces si S es indecidible, también lo es $SQ^=$.

51.15. *Si existe una extensión de SQ* [$SQ^=$] *que satisface las condiciones:*

1. *Todos sus axiomas adicionales son fbfs cerradas;*
2. *Es un sistema formal de la aritmética;*
3. *Es consistente;*
4. *Todo conjunto decidible de números naturales está representado en él;*

entonces SQ [$SQ^=$] *es indecidible.*

Demostración. Supongamos que S es ese sistema. Entonces la condición 1 asegura que S es una teoría de primer orden, y entonces (puesto que por 45.5 para cualquier teoría de primer orden $L \vdash A$ sii $\vdash_K A^c$) S satisface la tercera condición de la notabilidad, esto es, que una fórmula con variables libres es un teorema sii hay algún cierre de ella. Las condiciones 2-4 aseguran que S satisface las demás condiciones necesarias para que sea un sistema formal de ese tipo es indecidible. S es *ex hypothesi* una extensión finita de SQ [$SQ^=$]. Luego, por 51.14, SQ [$SQ^=$] es indecible [recordemos que todo esto sucede suponiendo que existe dicho sistema S]. Luego *si* existe dicho sistema, SQ[$SQ^=$] es indecidible.

En cuanto a la indecidibilidad de la lógica de predicados de primer orden, éste es el punto más lejano al que podemos llegar con facilidad y sin recurrir a la Tesis de Church (explicada en la secc. 52).

Lo que vamos a hacer es presentar un sistema formal de la aritmética que sea una extensión finita de $SQ^{=}$, demostrar que todo conjunto *recursivo* de números naturales está representado en el sistema (lo cual resulta difícil), y recurrir, por último a la tesis de Church formulada de la siguiente manera:

Todo conjunto decidible de números naturales es recursivo.

52. Tesis de Church (1935). Teorema de Church (1936)

Para decirlo con pocas palabras, la Tesis de Church es la propuesta de que tendríamos que identificar la noción intuitiva e informal de efectividad (en lógica y matemática) con la noción matemática de recursividad, que está definida con precisión (explicada en la secc. 53). Esta propuesta no admite una demostración formal rigurosa. Se trata, más bien, de un desafío que se nos plantea para producir algo que sea efectivo, en el sentido intuitivo, pero que no sea recursivo. Nadie ha conseguido todavía hacerlo.

Kurt Gödel, en su artículo de 1931, dio una definición precisa de una clase de funciones computables de la teoría de números que él llamó 'funciones recursivas', y a las que se dio, después de Kleene, el nombre de 'funciones recursivas primitivas'. En sus lecciones de 1934, y siguiendo una sugerencia de las lecciones de Herbrand, definió una clase más amplia de funciones computables, conocidas hoy por el nombre de funciones 'recursivas generales' o simplemente 'recursivas'. Casi simultáneamente [1932-5] Alonzo Church y S. C. Kleene estaban trabajando sobre una clase definida con precisión de funciones computables a la que llamaron 'funciones λ-definibles' [funciones lambda-definibles]. Se les ocurrió que esta clase podría abarcar todas las funciones que pueden considerarse como efectivamente computables en el sentido informal, y demostraron que la clase de las funciones λ-definibles es la misma que la clase de las funciones recursivas generales. Según esto, Church propuso en 1935 que la noción informal de una función efectivamente calculable de enteros positivos habría de identificarse con la noción matemática, definida con precisión, de función recursiva (general) (*Bulletin of the American Mathematical Society*, Mayo de 1935, [vol. 41] p. 333; recibido para su publicación el 22 de Marzo de 1935). En 1936, Alan M. Turing presentó una definición, completamente distinta, de una clase de fun-

ciones computables, en términos de lo que, a partir de entonces, ha llegado a ser conocido como máquinas de Turing; y demostró que su definición de computabilidad era equivalente a la de Church, en el sentido de que una función es Turing-computable (computable en el sentido de Turing) sii es λ-definible (o, lo que es equivalente, si es recursiva general). Emil Post, en el mismo año e independientemente de Turing, publicó un breve análisis de la computabilidad que era fundamentalmente el mismo que el de Turing. En un artículo publicado en 1943, Post presentó dos análisis adicionales, uno en términos de los sistemas combinatorios de Post, y otro en términos de los sistemas normales de Post. Algunas de las ideas de este artículo proceden de su obra inédita de 1920-2. Siguieron otros análisis, por ej., la teoría de algoritmos de Andrei Markov (1951). Todos estos análisis y definiciones diferentes, a partir del de Gödel de 1934, han resultado ser equivalentes, en el sentido de que todos ellos definen exactamente la misma clase de funciones de la teoría de números. Por estas equivalencias, y puesto que la Tesis de Church resulta obvia en una dirección ('Toda función recursiva es efectivamente computable'), podemos encontrar establecida la Tesis de muchas formas diferentes.

En el trabajo del cual la nota del *Bulletin* era un resumen, Church demostró que, suponiendo la Tesis, no existe ningún método efectivo para resolver una cierta clase de problemas de la teoría elemental de números (Church, 1935 *b*). Este fue el primero de todos los resultados de este tipo. Al año siguiente, 1936, Church mostró, también suponiendo la Tesis, que el sistema de lógica de predicados de primer orden de Hilbert y Ackermann es indecidible [Church, 1936]. Este último resultado se conoce como *Teorema de Church*, y es completamente diferente de su Tesis. El Teorema, dada la Tesis, es susceptible de una demostración rigurosa. También puede establecerse y demostrarse, sin recurrir a la Tesis, en cualquiera de las dos formulaciones siguientes:

O bien:

> El problema de la decisión para el sistema de lógica de predicados de primer orden de Hilbert-Ackermann es insoluble *recursivamente.*

O en una formulación más general:

> El conjunto de las fórmulas lógicamente válidas de cualquier lenguaje que sea adecuado para la lógica de predicados de primer orden no es *recursivo.*

(Esta última formulación utiliza el hecho de que las fórmulas de ese lenguaje pueden numerarse.)

Nuestro propósito, que es mostrar que todo conjunto recursivo de números naturales está representado en un sistema formal determinado, exige que veamos ahora un resumen de la teoría de las funciones recursivas.

53. Funciones recursivas[2]. Conjuntos recursivos

Vamos a definir una clase de funciones cuyos argumentos y valores son números naturales. Nos proponemos que la clase contenga todas las funciones de ese tipo que sean computables en un sentido intuitivo, y sólo a ellas. Comenzaremos por un bloque inicial de funciones que son claramente computables, especificamos algunas operaciones que cuando se aplican a funciones computables producen funciones computables, y definimos a continuación la clase como la clase de todas las funciones que se pueden obtener a partir del bloque inicial por aplicación, un número finito de veces, de dichas operaciones.

Nos ocuparemos exclusivamente de funciones cuyos argumentos y valores son números naturales, y esto es lo que deberá darse por supuesto a lo largo de lo que sigue.

Dedekind [1887], Peano [1889], Skolem [1923], Hilbert [1925, 1927] y Ackermann [1927] utilizaron las funciones recursivas en la investigación de los fundamentos de la matemática. Deben su nombre al artículo de Gödel de 1931, en el que su definición de la clase de las funciones recursivas (primitivas) hace referencia a funciones 'definidas recursivamente' a partir de otras. En efecto, una definición recursiva de una función es una definición por inducción matemática: para decirlo sólo aproximadamente, consiste en un conjunto de ecuaciones, una de las cuales da el valor de la función para el argumento 0, mientras que las otras dicen cuál es el valor de la función para el argumento $k+1$ en términos de su valor para el argumento k. Así, el valor para cualquier argumento dado puede computarse (calcularse) comenzando por 0 y aplicando las ecuaciones de recursión tantas veces como sea necesario. Sin embargo, resulta que la mención explícita de la recursión no es esencial para la definición de las funciones recursivas, y no la mencionaremos en la definición que vamos a dar. Asimismo, puesto que las funciones recursivas nos interesan para un objetivo determinado, y no por sí mismas, no nos detendremos a definir la subclase de las funciones recursivas conocidas como funciones recursivas primitivas, ni la superclase conocida como funciones recursivas parciales.

Funciones iniciales

1. La función sucesor, f_1, definida por la regla $f_1(x)=x+1$
2. La función suma, f_2, definida por la regla $f_2(x,\ y)=x+y$
3. La función producto, f_3, definida por la regla $f_3(x,\ y)=x\cdot y$
4. La función exponenciación, f_4, definida por la regla $f_4(x,\ y)=x^{y\,3}$
5. La función diferencia aritmética, f_5, definida por la regla $f_5(x,\ y)=x\dot{-}y$

   [$x\dot{-}y$ se conoce como la *diferencia aritmética* entre x e y. Si $x>y$, $x\dot{-}y$ es la diferencia ordinaria (resta). Si $x\leqslant y$, entonces $x\dot{-}y=0$.]

Se sobreentiende que todas estas funciones son funciones totales de números naturales a números naturales.

Operaciones que, cuando se aplican a funciones computables, producen funciones computables

1. *Combinación*

Sea f y g funciones. Entonces se dirá que la función h definida por una regla de la forma

$$h(\ldots,\ x,\ \ldots,\ y,\ \ldots)=f(\ldots,\ x,\ \ldots,\ g(\ldots,\ y,\ \ldots),\ \ldots)$$

(donde cualquier variable del lado derecho de la ecuación también aparece en el lado izquierdo) ha sido obtenida por *combinación* de las funciones f y g.

2. *La μ-operación* [*mu-operación*]

Sea $f(x_1\ \ldots\ x_n,\ y)$ una función computable de $n+1$ argumentos *tal que para cada n-tupla de números naturales* $\langle x_1\ \ldots\ x_n\rangle$ existe un *número natural y tal que* $f(x_1\ \ldots\ x_n,\ y)=0$. Entonces la función definida por la regla

$$g(x_1\ \ldots\ x_n)=\mu y\{f(x_1\ \ldots\ x_n,\ y)=0\},$$

en donde la parte derecha significa 'El último número y tal que $f(x_1\ \cdots\ x_n,\ y)=0$', se obtiene mediante la *μ-operación* a partir de la función f.

Resulta claro que cuando la μ-operación se aplica a una función f de $n+1$ argumentos que satisface las dos condiciones (1) que f es computable y (2) que para cada n-tupla de números naturales existe un número natural y tal que $f(x_1\ \ldots\ x_n,\ y)=0$, entonces la función resultante también es computable.

Cuando hablamos de 'funciones que se pueden obtener mediante la μ-operación' siempre queremos significar funciones que se pueden obtener aplicando la μ-operación a funciones que *satisfacen las dos condiciones.*

Definición. La clase de las *funciones recursivas* es la clase de todas las funciones que se pueden obtener a partir de las funciones iniciales mediante un número finito de aplicaciones de la μ-operación y/o combinación. Todas estas funciones serán funciones totales de números naturales a números naturales.

[Esta clase es idéntica a la clase de, por ejemplo, las funciones computables de Turing, y a la clase de las funciones computables por algoritmos de Markov.]

Conjuntos recursivos

Seguimos ocupándonos exclusivamente de conjuntos de números naturales.

Un conjunto X de números naturales es *recursivo* sii existe una función recursiva f tal que para cada número natural n, $n \in X$ sii $f(n)=0$.

Puesto que toda función recursiva es computable, se sigue que si un conjunto es recursivo, entonces existe un método efectivo para determinar si un pretendido elemento del conjunto es realmente un elemento o no lo es: es decir, todo conjunto recursivo es decidible.

54. Representación, representación fuerte y definibilidad de funciones en un sistema formal

Decimos que una función f (de números naturales a números naturales) está *representada* en un sistema formal S sii existe una fórmula de S, que escribiremos como $A(v_1, .. v_{n+1})$, con variables libres $v_1 \ldots, v_{n+1}$ tal que para cada $n+1$ -tupla de números naturales $\langle k_1 \ldots, k_{n+1}\rangle$

$$f(k_1 \ldots, k_n)=k_{n+1} \text{ sii } \vdash_S A(\overline{k}_1 \ldots, \overline{k_{n+1}}),$$

donde $\underline{A(\overline{k}^1 \ldots, \overline{k_{n+1}})}$ es el resultado de sustituir por los numerales $\overline{k}_1 \ldots, \overline{k_{n+1}}$ las variables $v_1 \ldots, v_{n+1}$ respectivamente en $A(v_1 \ldots, v_{n+1})$.

Si toda función recursiva está representada en S, entonces también lo está todo conjunto recursivo. Ya que sea X un conjunto recursivo cualquiera. Entonces por definición existe una función recursiva f tal que,

para cada número natural n, $f(n)=0$ sii $n \in X$. Sea S un sistema formal en el cual esté representada toda función recursiva. Entonces f está representada en S; es decir, existe una fórmula $A(v_1, v_2)$ de S tal que para cada par de números naturales m, n

$$f(m)=n \text{ sii } \vdash_S A(\bar{m}, \bar{n})$$

y por lo tanto tal que

$$f(m)=0 \text{ sii } \vdash_S A(\bar{m}, \bar{0})$$

[$\bar{0}$ es el numeral en S para 0]

Así tenemos:

$$m \in X \text{ sii } f(m)=0 \text{ sii } \vdash_S A(\bar{m}, \bar{0})$$

Pero $A(v, \bar{0})$ es una fórmula con sólo una variable libre, v. Luego existe una fórmula $A(v, \bar{0})$ de S con sólo una variable libre tal que, para cada número natural m, $m \in X$ sii $\vdash_S A(\bar{m}, \bar{0})$: es decir, X está representando en S.

Representación fuerte

Diremos que una función f de n argumentos está *fuertemente representada* en un sistema formal S sii existe una fórmula $A(v_1 \ldots, v_{n+1})$ de S son variables libres $v_1 \ldots, v_{n+1}$ tal que para cada $n+1$ -tupla de números naturales $\langle k_1 \ldots, k_{n+1} \rangle$

(i) si $f(k_1 \ldots k_n)=k_{n+1}$, entonces $\vdash_S A(\overline{k_1} \cdots \overline{k_{n+1}})$

y

(ii) si $f(k_1 \ldots, k_n) \neq k_{n+1}$, entonces $\vdash_S \sim A(\overline{k_1} \ldots, \overline{k_{n+1}})$

De nuestras definiciones se sigue que si una función está fuertemente representada en un sistema S y S es consistente, entonces f está representada en S.

Definibilidad de funciones en un sistema formal

Una función f de un argumento es *definible* en un sistema formal S sii está fuertemente representada en S mediante una fórmula $A(x, y)$ y también se satisface la condición (iii) recogida a continuación; es decir, sii

(i) Para todos los pares de números naturales m, n si $f(m)=n$ entonces $\vdash_S A(\bar{m}, \bar{n})$

(ii) Para todos los pares de números naturales m, n si $f(m) \neq n$ entonces $\vdash_S \sim A\ (\bar{m}, \bar{n})$

(iii) $\vdash_S \wedge x \wedge y \wedge z(A(x, y) \supset (A(x, z) \supset y = z))$

Esta definición puede generalizarse fácilmente a funciones con más de un argumento.

Resulta obvio que si f es definible en S y S es consistente, entonces f está representado en S.

55. Un sistema formal de la aritmética: el sistema H

El paso siguiente consiste en presentar un sistema formal en el que, como veremos, esté representado todo conjunto recursivo de números naturales.

El sistema H es una teoría de primer orden cuyos axiomas específicos son los axiomas generables mediante el esquema de axioma $SQ^{=}$ 2 (secc. 47) y los 24 axiomas que se enumeran a continuación.

El lenguaje de H es el lenguaje Q. Para una mayor legibilidad escribiremos:

x, y, z, w	en	vez	de	x', x'', x''', x''''
0	en	vez	de	a'
St	en	vez	de	$f^{*'}t$
$t_1 + t_2$	en	vez	de	$f^{**'}t_1t_2$
$t_1 \cdot t_2$	en	vez	de	$f^{**''}t_1t_2$
Pt_1t_2	en	vez	de	$f^{**'''}t_1t_2$
$t_1 = t_2$	en	vez	de	$F^{**'}t_1t_2$
$t_1 < t_2$	en	vez	de	$F^{**''}t_1t_2$
$(A \wedge B)$	en	vez	de	$\sim(A \supset \sim B)$
$(A \vee B)$	en	vez	de	$(\sim A \supset B)$

y usaremos corchetes para indicar algunos agrupamientos. (Cuando los axiomas se expresan sin restricciones, los corchetes no serán necesarios.)

El dominio de la interpretación propuesta de H es el conjunto de los números naturales.

Bajo la interpretación propuesta, a', $f^{*'}a'$, $f^{*'}f^{*'}a'$, $f^{*'}f^{*'}f^{*'}a'$, . . . son numerales, que, en nuestra interpretación abreviada, escribiremos como

0, S0, SS0, SSS0, . . .

Bajo la interpretación propuesta $f^{*\prime}(5)$ expresa la función sucesor; los símbolos funcionales $f^{**\prime}$, $f^{**\prime\prime}$, $f^{**\prime\prime\prime}$ expresan respectivamente la función suma (adición), la función producto (multiplicación), y la función potencia (exponenciación); y los símbolos predicativos $F^{**\prime}$ y $F^{**\prime\prime}$ expresan respectivamente las relaciones de *identidad* y *ser menor que*.

Sistema H

Axiomas:

Todas las fbfs de Q que son axiomas de SQ por cualquiera de los esquemas SQ 1-7
Todas las fbfs de Q que son axiomas de $SQ^{=}$ por el esquema $SQ^{=}$ 2
Y además:

1 $\wedge x[x=x]$ [es decir, $SQ^{=}$ 1]
2 $\wedge x \wedge y \wedge z(x=y \supset (y=z \supset x=z))$
3 $\wedge x \wedge y \wedge z(x=y \supset (x=z \supset y=z))$
4 $\wedge x \wedge y(x=y \supset Sx=Sy)$
5 $\wedge x[0<Sx]$
6 $\wedge x[\sim x<0]$
7 $\wedge x \wedge y(x<y \supset Sx<Sy)$
8 $\wedge x \wedge y(x<y \supset \sim x=y)$
9 $\wedge x \wedge y(x<y \supset \sim y=x)$
10 $\wedge x \wedge y(x<y \supset =y<x)$
11 $\wedge x \wedge y(\sim x<y \supset (=y<x \supset x=y))$
12 $\wedge x \wedge y(y<Sx \supset (y<x \vee y=x))$
13 $\wedge x[x+0=x]$
14 $\wedge x \wedge y[x+Sy=S[x+y]]$
15 $\wedge x \wedge y \wedge z \wedge w(x=y \supset (z+x=w \supset z+y=w))$
16 $\wedge x \wedge y \wedge z \wedge w(x=y \supset (z=x+w \supset z=y+w))$
17 $\wedge x[x \cdot 0=0]$
18 $\wedge x \wedge y[x \cdot Sy=[x \cdot y]+x]$
19 $\wedge x \wedge y \wedge z \wedge w(x=y \supset (z \cdot x=w \supset z \cdot y=w))$
20 $\wedge x \wedge y \wedge z \wedge w(x=y \supset (z=x \cdot w \supset z=y \cdot w))$
21[5] $\wedge x[Px0=S0]$
22[6] $\wedge x \wedge y[PxSy=[Pxy] \cdot x]$
23 $\wedge x \wedge y \wedge z \wedge w(x=y \supset (Pzx=w \supset Pzy=w))$
24 $\wedge x \wedge y \wedge z \wedge w(((y<x \wedge x=y+z) \vee (\sim y<x \wedge z=0)) \supset$
$(((y<x \wedge x=y+w) \vee (\sim y<x \wedge w=0)) \supset z=w))$

Lo que nos proponemos principalmente al formular este conjunto de axiomas es simplificar y acortar en la medida de lo posible las demostraciones metateoréticas de la secc. 56. No hemos tenido en cuenta, en

cambio, la economía, la independencia o la elegancia. En vez de estos axiomas, podríamos haber tomado los siete de la aritmética de Robinson (secc. 48), que, con el añadido de los axiomas de $SQ^{=}$, hubieran constituido un sistema adecuado, mucho más sencillo y mucho más elegante. Pero las demostracciones metateoréticas hubieran sido mucho más laboriosas.

La consistencia de H

H satisface las tres condiciones de la secc. 51 para constituir un sistema formal de la aritmética. Puesto que es una teoría de primer orden, también satisface la tercera condición para la notabilidad. Los otros dos requisitos de la notabilidad son

1. Que sea consistente,
2. Que esté representado en él todo conjunto decidible de números naturales

Parece intuitivamente claro que la interpretación propuesta de H es un modelo de H, y de aquí que H sea constante. Pero, ¿cómo podemos demostrar esto? Parece que ninguna demostración de la consistencia de H tendría que apelar a principios al menos tan sujetos a debate como los que se encuentran en H. Por ejemplo, nuestra definición de modelo utiliza la teoría de conjuntos, y nadie ha demostrado que la teoría de conjuntos sea consistente. Luego en este caso seguimos simplemente nuestra intuición de que todos los axiomas de H resultan verdaderos bajo la interpretación propuesta, y que por lo tanto H es consistente. (Para información adicional, cf. las referencias de la secc. 59, bajo el título *Segundo teorema de incompletud de Gödel.*)

Falta la segunda condición para la notabilidad. Demostraremos que todo conjunto recursivo de números naturales está representado en H, y recurriremos después a la Tesis de Church formulada de la siguiente manera: 'Todo conjunto decidible de números naturales es recursivo.'

56. Demostración de la indecidibilidad de H

A lo largo de esta sección:

$\vdash$ es una abreviatura de $\vdash_H$;

$\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{k}$, $\overline{m+1}$, $\overline{m+k}$, $\overline{m+k+1}$ (por ejemplo)

son los numerales de H que denotan, respectivamente, los números m, n, k, $m+1$, $m+k$, $m+k+1$

Presentamos demostraciones resumidas. Por ejemplo, decimos simplemente 'Por el axioma 1' cuando de hecho queremos decir 'Por el axioma 1, SQ 4, y Modus Ponens'. Tampoco nos molestaremos habitualmente en citar tautologías, sino que escribiremos simplemente 'Por lógica proposicional'. También omitiremos algunos paréntesis. En virtud del teorema de completud para SQ tenemos a nuestra disposición todas las fórmulas lógicamente válidas de Q.

Para obtener la indecidibilidad de H queremos establecer que toda función recursiva es definible en H^7. Comenzaremos (56.1-56.8) estableciendo algunos metateoremas previos acerca de H.

56.1. *Para cualesquiera números naturales m, n, si* $m=n$ *entonces* $\vdash \overline{m}=\overline{n}$

Demostración. Por el axioma 1.

56.2. *Para cualesquiera números naturales m, n, si* $m<n$ *entonces* $\vdash \overline{m}<\overline{n}$

Demostración. $m<n$ sii $0<n-m$. Supongamos que $0<n-m$. Entonces $\vdash \overline{0<n-m}$ por el axioma 5. Entonces por m aplicaciones del axioma 7 obtenemos $\vdash \overline{m<n-m+m}$, es decir, $\vdash \overline{m}<\overline{n}$.

56.3. *Para cualesquiera números naturales m, n, si* $m\neq n$ *entonces* $\vdash \sim \overline{m}=\overline{n}$.

Demostración. Supongamos $m\neq n$. Entonces, o bien $m<n$ o bien $n<m$. Luego por 56.2, tenemos que o bien $\vdash \bar{m}<\bar{n}$ o bien $\vdash \bar{n}<\bar{m}$. Luego por el axioma 8 o el axioma 9, $\vdash \sim \overline{m}=\overline{n}$.

56.4. *Para cualesquiera números naturales m, n, si* $\sim m<n$, *entonces* $\vdash =\bar{m}<\bar{n}$

Demostración. Supongamos $\sim m<n$. Entonces o bien $n<m$ o bien $m=n$. Luego o bien $\vdash \overline{n<m}$ por 56.2, o bien $\vdash \overline{m=n}$ por 56.1. Entonces, por el axioma 10, o por el axioma 8, y por lógica proposicional, $\vdash \sim \overline{m<n}$.

56.5. *Para cualquier número natural m,* $\vdash \overline{Sm}=\overline{m+1}$

Demostración. El numeral $\overline{Sm}$ es el mismo numeral que $\overline{m+1}$. Luego por el axioma 1, $\vdash \overline{Sm=m+1}$.

56.6. *Para cualesquiera números naturales* m, n, $\vdash \overline{m}+\overline{n}=\overline{m+n}$

Demostración. Por inducción en el metalenguaje.

Base: Hay que demostrar $\vdash \overline{m}+\overline{0}=\overline{m+0}$

Por el axioma 13, $\vdash \overline{m}+0=\overline{m}$. Pero $\overline{m}$ es $\overline{m+0}$ y 0 es $\overline{0}$. Luego $\vdash \overline{m}+\overline{0}=\overline{m+0}$.

Paso de la inducción

Supongamos $\vdash \overline{m}+\overline{k}=\overline{m+k}$. Hay que demostrar $\vdash \overline{m}+\overline{k+1}=\overline{m+k+1}$.

$\vdash \overline{m}+Sk=S[\overline{m}+\overline{k}]$ por el axioma 14. . . . . (1)

Por la hipótesis de la inducción $\vdash \overline{m}+\overline{k}=\overline{m+k}$ . . . . . (2)

luego a partir de (2) por el axioma 4 $\vdash S[\overline{m}+\overline{k}]=S\overline{m+k}$ . . . . . (3)

Luego a partir de (1) y (3) por el axioma 2 $\vdash \overline{m}+S\overline{k}=S\overline{m+k}$ . . (4)

Por 56.5 $\vdash S\overline{m+k}=\overline{m+k+1}$. . . . . (5)

Luego a partir de (4) y (5) por el axioma 2 $\vdash \overline{m}+S\overline{k}=\overline{m+k+1}$ (6)

Por 56.5 $\vdash S\overline{k}=\overline{k+1}$. . . . . (7)

Luego a partir de (7) y (6) por el axioma 15 $\vdash \overline{m}+\overline{k+1}=\overline{m+k+1}$

Lo que completa el Paso de la Inducción y la demostración.

56.7. *Para cualesquiera números naturales* m, n, $\vdash \overline{m}.\overline{n}=\overline{m.n}$

Demostración. Por inducción en el metalenguaje.

Base: Hay que demostrar $\vdash \overline{m}.\overline{0}=\overline{m.0}$.

Por el axioma 17 $\vdash \overline{m.0}=0$. *Pero* 0 *es* $\overline{0}$ *y* $\overline{m.0}$ es $\overline{0}$.

Luego $\vdash \overline{m}.\overline{0}=\overline{m.0}$.

Paso de la Inducción

Supongamos $\vdash \overline{m}.\overline{k}=\overline{m.k}$. Hay que demostrar $\vdash \overline{m}.\overline{k+1}=\overline{[m.k]+m}$.

Por el axioma 18 $\vdash \overline{m}.S\overline{k}=\overline{[m.k]}+\overline{m}$ . . . . . (1)

Por la hipótesis de la inducción $\vdash \overline{m}.\overline{k}=\overline{m.k}$ . . . . . (2)

A partir de (2) y (1) por el axioma 16 $\vdash \overline{m}.S\overline{k}=\overline{m.k}+\overline{m}$. . . . . (3)

Por 56.6 $\vdash \overline{m.k}+\overline{m}=\overline{[m.k]+m}$ . . . . . (4)

Luego a partir de (3) y (4) por el axioma 2 $\vdash \overline{m}.S\overline{k}=\overline{[m.k]+m}$. (5)

Pero a partir de 56.5 $\vdash S\overline{k}=\overline{k+1}$. . . . . (6)

Luego a partir de (6) y (5) por el axioma 19 $\vdash \overline{m}.\overline{k+1}=\overline{[m.k]+m}$

Lo que completa el Paso de la Inducción y la demostración.

56.8. *Para cualesquiera números naturales* m, n $\vdash P\overline{m}\ \overline{n}=\overline{m^n}$

Demostración. Por inducción.
Base: Hay que demostrar $\vdash P\overline{m}\ \overline{0}=\overline{m^0}$.

Por el axioma 21 $\vdash P\overline{m}0=S0$
Pero 0 es $\overline{0}$ y $\overline{m^0}$ es S0. Luego $\vdash P\overline{m}0=\overline{m^0}$.

Paso de la Inducción

Supongamos $\vdash P\overline{m}\ \overline{k}=\overline{m^k}$. Hay que demostrar $\vdash P\overline{m}\ \overline{k+1}=\overline{m^{k+1}}$.
Por el axioma 22 $\vdash P\overline{m}S\overline{k}=[P\overline{m}\ \overline{k}].\overline{m}$ ..... (1)
Por la hipótesis de la inducción $\vdash P\overline{m}\ \overline{k}=\overline{m^k}$ ..... (2)
Luego a partir de (2) y (1) por el axioma 20 $\vdash P\overline{m}S\overline{k}=\overline{m^k}\cdot\overline{m}$ .. (3)
Por 56.7 $\vdash \overline{m^k}.\overline{m}=\overline{m^k.m}$ ..... (4)
Luego a partir de (3) y (4) por el axioma 2 $\vdash P\overline{m}S\overline{k}=\overline{m^k.m}$ .... (5)
Pero por 56.5 $\vdash S\overline{k}=\overline{k+1}$ ..... (6)
Luego a partir de (6) y (5) por el axioma 23 $\vdash P\overline{m}\ \overline{k+1}=\overline{m^k.m}$
Pero $\overline{m^k.m}$ es $\overline{m^{k+1}}$.
Luego $\vdash P\overline{m}\ \overline{k+1}=\overline{m^{k+1}}$.

Lo que completa el Paso de la Inducción y la demostración.

Definibilidad en H de las funciones iniciales (cf. pp. 264-265).

56.9. *La función sucesor es definible en H mediante la fórmula* $Sx=y$

Demostración

Condición (i). Supongamos que $m+1=n$. Entonces $\overline{m+1}$ es $\overline{n}$. Luego por el axioma 1, $\vdash \overline{m+1}=\overline{n}$. Pero $\overline{m+1}$ es $S\overline{m}$. Luego $\vdash S\overline{m}=\overline{n}$. Luego si $m+1=n$, entonces $\vdash S\overline{m}=\overline{n}$.

Condición (ii). Supongamos que $m+1\neq n$. Entonces por 56.3 $\vdash\sim\overline{m+1}=\overline{n}$, es decir, $\vdash\sim S\overline{m}=\overline{n}$. Luego si $m+1\neq n$, entonces $\sim S\overline{m}=\overline{n}$.

Condición (iii). Por el axioma 3 $\vdash(Sx=y\supset(Sx=z\supset y=z))$.
Entonces por 45.5 $\vdash \wedge x\wedge y\wedge z(Sx=y\supset(Sx=z\supset y=z))$.

56.10. *La función suma es definible en H mediante la fórmula* $x+y=z$

Demostración

Condición (i). Supongamos $m+n=k$. Entonces $\overline{m+n}$ es $\overline{k}$. Luego por el axioma 1, $\vdash \overline{m+n}=\overline{k}$. Luego, puesto que por 56.6 $\vdash \overline{m+n}=\overline{m}+\overline{n}$, por el axioma 2 $\vdash \overline{m}+\overline{n}=\overline{k}$.

Condición (ii). Supongamos que $m+n\neq k$. Entonces, por 56.3, $\vdash \sim \overline{m+n}=\overline{k}$. Entonces, puesto que $\vdash \overline{m+n}=\overline{m}+\overline{n}$, por el axioma 3 y por lógica proposicional $\vdash \sim \overline{m}+\overline{n}=\overline{k}$. Luego si $m+n\neq k$, entonces $\vdash \sim \overline{m}+\overline{n}=\overline{k}$.

Condición (iii). Por el axioma 3 y 45.5
$\vdash \wedge x \wedge y \wedge z \wedge w(x+y=z \supset (x+y=w \supset z=w))$.

56.11. *La función producto es definible en H mediante la fórmula* $x.y=z$

Demostración

Condición (i). Supongamos que $m.n=k$. Entonces $\vdash \overline{m.n}=\overline{k}$, por el axioma 1. Luego puesto que por 56.7 $\vdash \overline{m.n}=\overline{m}.\overline{n}$, por el axioma 2 $\vdash \overline{m}.\overline{n}=\overline{k}$. Luego si $m.n=k$, entonces $\vdash \overline{m}.\overline{n}=\overline{k}$.

Condición (ii). Supongamos que $m.n\neq k$. Entonces $\vdash \sim \overline{m.n}=\overline{k}$. Entonces, puesto que $\vdash \overline{m.n}=\overline{m}.\overline{n}$, por el axioma 3 y lógica proposicional $\vdash \overline{m}.\overline{n}=\overline{k}$. Luego si $m.n\neq k$, entonces $\vdash \sim \overline{m}.\overline{n}=\overline{k}$.

Condición (iii). Por el axioma 3 y 45.5
$\vdash \wedge x \wedge y \wedge z \wedge w(x.y=z \supset (x.y=w \supset z=w))$.

56.12. *La función potenciación es definible en H mediante la fórmula* $Pxy=z$

Demostración

Condición (i). Supongamos $m^n=k$. Entonces $\vdash \overline{m^n}=\overline{k}$, por el axioma 1. Entonces, puesto que $\vdash \mathrm{P}\,\overline{m}\,\overline{n}=\overline{m^n}$ (56.8), $\vdash \mathrm{P}\,\overline{m}\,\overline{n}=\overline{k}$, por el axioma 2. Luego si $m^n=k$, entonces $\vdash \mathrm{P}\,\overline{m}\,\overline{n}=\overline{k}$.

Condición (ii). Supongamos que $m^n\neq k$. Entonces $\vdash \sim \overline{m^n}=\overline{k}$. Entonces puesto que $\vdash \mathrm{P}\,\overline{m}\,\overline{n}=\overline{m^n}$, por el axioma 3 y lógica proposicional $\vdash \sim \mathrm{P}\,\overline{m}\,\overline{n}=\overline{k}$. Luego si $m^n\neq k$, entonces $\vdash \sim \mathrm{P}\,\overline{m}\,\overline{n}=\overline{k}$.

Condición (iii). Por el axioma 3 y 45.5
$\vdash \wedge x \wedge y \wedge z \wedge w(\mathrm{P}xy=z \supset (\mathrm{P}xy=w \supset z=w))$.

56.13 *La función de diferencia aritmética es definible en H mediante la fórmula* $(y<x \wedge x=y+z) \vee (\sim y<x \wedge z=0)$

Demostración

Condición (i). Supongamos que $m \dot{-} n=k$. Existen dos casos posibles: (1) $n<m$ (2) $m \leqslant n$.

1. Supongamos $n<m$. Entonces $m \dot{-} n=m-n$. Luego $m=n+(m \dot{-} n)$. Entonces tenemos $\vdash \overline{n}<\overline{m}$ y $\vdash \overline{m}=\overline{n+(m \dot{-} n)}$ y, por lo tanto, por 56.6 $\vdash \overline{m}=\overline{n}+\overline{m \dot{-} n}$. Luego $\vdash \overline{n}<\overline{m} \wedge \overline{m}=\overline{n}+\overline{m \dot{-} n}$. Pero $m \dot{-} n$ es k. Luego $\vdash \overline{n}<\overline{m} \wedge \overline{m}=\overline{n}+\overline{k}$.

2. Supongamos $m \leqslant n$. Entonces $m \dot{-} n=0$. Y tenemos $\vdash \sim \overline{n}<\overline{m} \wedge \overline{m \dot{-} n}=0$. Pero $\overline{m \dot{-} n}$ es $\overline{k}$. Luego $\vdash \sim \overline{n}<\overline{m} \wedge \overline{k}=0$.

Luego tenemos:

Si $m \dot{-} n=k$ y $n<m$, entonces $\vdash \overline{n}<\overline{m} \wedge \overline{m}=\overline{n}+\overline{k}$.

Si $m \dot{-} n=k$ y $m \leqslant n$, entonces $\vdash \sim \overline{n}<\overline{m} \wedge \overline{k}=0$.

Luego si $m \dot{-} n=k$, entonces o $\vdash \overline{n}<\overline{m} \wedge \overline{m}=\overline{n}+\overline{k}$, o bien $\vdash \sim \overline{n}<\overline{m} \wedge \overline{k}=0$.

Pero si $\vdash A$ o $\vdash B$, entonces, o bien $\vdash A \vee C$, o bien $\vdash B \vee D$, donde C y D son fbfs cualesquiera. Luego si $\vdash A$ o $\vdash B$, entonces o bien $\vdash A \vee B$, o bien $\vdash B \vee A$. Pero $\vdash (B \vee A) \supset (A \vee B)$. Luego si o bien $\vdash A$ o bien $\vdash B$ entonces o bien $\vdash A \vee B$ o bien $\vdash A \vee B$; es decir, si $\vdash A$ o $\vdash B$, entonces $\vdash A \vee B$.

Luego si $m \dot{-} n=k$ entonces $\vdash (\overline{n}<\overline{m} \wedge \overline{m}=\overline{n}+\overline{k}) \vee (\sim \overline{n}<\overline{m} \wedge \overline{k}=0)$.

Condición (ii). Supongamos que $m \dot{-} n \neq k$. Tenemos de nuevo dos casos posibles: (1) $n<m$ (2) $m \leqslant n$.

1. Supongamos $n<m$. Entonces, como sucedía en (i) 1, tenemos $m=n+(m \dot{-} n)$ y por lo tanto, puesto que $m \dot{-} n \neq k$, $m \neq n+k$. Así tenemos $\vdash \sim \bar{m}=\bar{n}+\bar{k}$. Luego, como en el caso de (i), tenemos: $\vdash \bar{n}<\bar{m}$. Luego $\vdash \bar{n}<\bar{m} \wedge \sim \bar{m}=\bar{n}+k$.

2. Supongamos $m \leqslant n$. Entonces $m \dot{-} n=0$. Pero $m \dot{-} n \neq k$. Luego $k \neq 0$. Luego $\vdash \sim \overline{k}=0$. Pero asimismo $\vdash \sim \bar{n}<\bar{m}$. Luego tenemos $\vdash \sim \bar{n}<\bar{m} \wedge \sim \overline{k}=0$.

Luego, al igual que antes en (i) tenemos:

Si $m \dot{-} n \neq k$ entonces $\vdash (\bar{n}<\bar{m} \wedge \sim \bar{m}=\bar{n}+k) \vee (\sim \bar{n}<\bar{m} \wedge \sim \overline{k}=0)$.

A partir de esto obtenemos por lógica proposicional:

Si $m \dot{-} n \neq k$ entonces $\vdash \sim ((\bar{n}<\bar{m} \wedge \bar{m}=\bar{n}+\overline{k}) \vee (\sim \bar{n}<\bar{m} \wedge \overline{k}=0))$.

Condición (iii). Por el axioma 24.

Queremos mostrar a continuación que cualquier función obtenida mediante la μ-operación o mediante combinación a partir de funciones definibles en H, es también definible en H. Vamos a demostrar un Lema previo.

56.14 *Lema: Sea S una teoría de primer orden en la que la función de identidad está fuertemente representada mediante '$x=y$'. Sea $A(x, y)$ una fórmula de S de la que es verdadero que*

$$\vdash_S \wedge x \wedge y \wedge z(\mathrm{A}(x, y) \supset (\mathrm{A}(x, z) \supset y = z))$$

Entonces, para mostrar que una función f de un argumento es definible en S mediante la fórmula $A(x, y)$, basta con mostrar que

$$\vdash A(\bar{m}, \overline{f(m)})$$

Demostración.

Condición (i). Supongamos que $f(m)=n$. Entonces $\overline{f(m)}$ es $\bar{n}$. Luego si podemos mostrar que $\vdash_S \mathrm{A}(\bar{m}, \overline{f(m)})$, habremos mostrado que $\vdash_S \mathrm{A}(\bar{m}, \bar{n})$, y por tanto que se ha satisfecho la condición (i) de la definibilidad.

Condición (ii). Supongamos que $f(m) \neq n$. Entonces, puesto que *ex hypothesi* la identidad está fuertemente representada en S mediante '$x=y$', entonces $\vdash_S \sim \overline{f(m)} = \bar{n}$. También *ex hypothesi* tenemos $\vdash_S \mathrm{A}(\bar{m}, \overline{f(m)}) \supset (\mathrm{A}(\bar{m}, \bar{n}) \supset f(m) = \bar{n})$. Luego por lógica proposicional $\supset (\sim f(m) = \bar{n} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m}, \bar{n}))$. Luego si podemos mostrar que $\vdash_S \mathrm{A}(\bar{m}, \overline{f(m)})$, obtenemos, por doble aplicación del Modus Ponens $\vdash_S \sim \mathrm{A}(\bar{m}, \bar{n})$, y por lo tanto la condición (ii) estará satisfecha.

Condición (iii). Está satisfecha *ex hypothesi.*

Puede generalizarse el Lema a funciones con más de un argumento.

Combinación

Para mayor simplicidad consideramos simplemente funciones con un argumento. La demostración puede generalizarse fácilmente de forma que cubra funciones con más de un argumento.

Sea f una función definible en H mediante una fórmula $\mathrm{A}(x, y)$ y g una función definible en H mediante una fórmula $\mathrm{B}(x, y)$. Mostraremos que la función mediante la regla $\mathrm{B}(x, y)$. Mostraremos que la función H definida mediante la regla

$$h(x) = f(g(x))$$

es definible en H mediante la fórmula

$$\vee w(\mathrm{B}(x, w) \wedge \mathrm{A}(w, y))$$

Condición (iii)

Tenemos *ex hypothesi*

$\vdash \wedge x \wedge y \wedge z(\mathrm{A}(x, y) \supset (\mathrm{A}(x, z) \supset y = z))$

y

$\vdash \wedge x \wedge y \wedge z(\mathrm{B}(x, y) \supset (\mathrm{B}(x, z) \supset y = z))$

Queremos mostrar que

$\vdash \wedge x \wedge y \wedge z(\vee w(\mathrm{B}(x, w) \wedge \mathrm{A}(w, y)) \supset (\vee w(\mathrm{B}(x, w) \wedge \mathrm{A}(w, z)) \supset y = z))$

Sean P, Q, R y S abreviaturas de las siguientes fórmulas:

P: $\wedge x \wedge y \wedge z(\mathrm{A}(x, y) \supset (\mathrm{A}(x, z) \supset y = z))$
Q: $\wedge x \wedge y \wedge z(\mathrm{B}(x, y) \supset (\mathrm{B}(x, z) \supset y = z))$
R: $\mathrm{B}(x, w) \wedge \mathrm{A}(w, y)$
S: $\mathrm{B}(x, w) \wedge \mathrm{A}(w, z)$

Entonces queremos mostrar que, dados $\vdash$ P y $\vdash$ Q,

$\vdash \wedge x \wedge y \wedge z(\vee w\mathrm{R} \supset (\vee w\mathrm{S} \supset y = z))$

Sea H′ la primera teoría de primer orden que resulta de añadir a H una cantidad enumerable de nuevas constantes b', b'', b''', . . . Y sea H″ la primera teoría enumerable de nuevas constantes c', c'', c''', . . . Es obvio que

(1) $\mathrm{R}b'/w, \wedge w\mathrm{S} \vdash_{\mathrm{H}'} \vee w\mathrm{S}$

Mostraremos más adelante que

(2) $\mathrm{R}b'/w, \vee w\mathrm{S}, \mathrm{S}c'/w \vdash_{\mathrm{H}''} y = z$

A partir de (1) y (2) tenemos, en virtud de la Regla E (45.24, p.),

(3) $\mathrm{R}b'/w, \vee w\mathrm{S} \vdash_{\mathrm{H}'} y = z$

A partir de (3) resulta obvio que

(4) $\vee w\mathrm{R}, \vee w\mathrm{S}, \mathrm{R}b'/w \vdash_{\mathrm{H}'} y = z$

También es obvio que

(5) $\vee w\mathrm{R}, \vee w\mathrm{S} \vdash_{\mathrm{H}} \vee w\mathrm{R}$

A partir de (4) y (5), y en virtud de la Regla E,

(6) $\vee w\mathrm{R}, \vee w\mathrm{S} \vdash_{\mathrm{H}} y = \mathrm{z}$

A partir de 6 mediante el Teorema de Deducción

(7) $\vdash_H \vee wR \supset (\vee wS \supset y = z)$

Y entonces, por tres aplicaciones de 45.4,

(8) $\vdash_{H''} \wedge x \wedge y \wedge z(\vee wR \supset (\vee wS \supset y = z))$

que es a lo que queríamos llegar.

Todavía tenemos que mostrar que (2) vale:

1. $\vdash_{H''} B(x, b') \supset (B(x, c') \supset b' = c')$ [A partir de $\vdash Q$ utilizando repetidamente K4 y MP]
2. $Rb'/w, Sc'/w$ [p.e. $B(x, b') \wedge A(b', y), B(x, c') \wedge A(c', z)$: abreviamos esto mediante T] $\vdash_{H''} B(x, b') \wedge A(b', y)$
3. $T \vdash_{H''} B(x, b')$ [A partir de 2 por lógica proposicional]
4. $T \vdash_{H''} B(x, c') \supset b' = c'$ [1, 3, MP]
5. $T \vdash_{H''} B(x, c') \wedge A(c', z)$ [es decir, Sw/c']
6. $T \vdash_{H''} B(x, c')$ [A partir de 5 por lógica proposicional]
7. $T \vdash_{H''} b' = c'$ [4, 6, MP]
8. $\vdash_{H''} b' = c' \supset (A(b', y) \supset A(c', y))$ [$SQ^{=}$ 2]
9. $T \vdash_{H''} A(b', y) \supset A(c', y)$ [7, 8, MP]
10. $T \vdash_{H''} A(b', y)$ [A partir de 2 por lógica proposicional]
11. $T \vdash_{H''} A(c', y)$ [9, 10, MP]
12. $\vdash_{H''} A(c', y) \supset (A(c', z) \supset y = z)$ [A partir de $\vdash P$ mediante utilización reiterada de K4 y MP]
13. $T \vdash_{H''} A(c', z) \supset y = z$ [11, 12, MP]
14. $T \vdash_{H''} A(c', z)$ [A partir de 5 por lógica proposicional]
15. $T \vdash_{H''} y = z$ [13, 14, MP]

Luego T, $\vee wS \vdash_{H''} y = z$.

Luego $Rb'/w, \vee wS, Sc'/w \vdash_{H''} y = z$, que es a lo que queríamos llegar.

Luego la condición (iii) está satisfecha. Luego por el Lema 56.14 para demostrar que h es definible en H sólo tenemos que mostrar que

$$\vdash \vee w(B(\bar{m}, w) \wedge A(w, \overline{f(g(m))}))$$

Puesto que g es definible mediante $B(x, y)$ tenemos

$$\vdash B(\bar{m}, \overline{g(m)})$$

Puesto que f es definible mediante $A(x, y)$ tenemos

$$\vdash A(\overline{g(m)}, \overline{f(g(m))})$$

Luego tenemos

$$\vdash B(\bar{m}, \overline{g(m)}) \wedge A(\overline{g(m)}, \overline{f(g(m))})$$

De aquí, por 45.25 [*Si t es un término cerrado de K, entonces* $\vdash_K Av/t \supset \vee vA$] y MP

$$\vdash \vee w(B(\bar{m}, w) \wedge A(w, \overline{f(g(m))}))$$

que es lo que queríamos obtener.

Antes de considerar la μ-operación, vamos a demostrar un Lema.

56.15 $\vdash x < \bar{k} \supset (x = 0 \vee \ldots \vee x = \overline{k-1})$

Demostración

Base: $\bar{k} = 0$

En virtud de la tautología $\sim A \supset (A \supset B)$

$\vdash \sim x < 0 \supset (x < 0 \supset (x = 0 \vee \ldots \vee x = \overline{k-1}))$.

Por el axioma 6

$\vdash \sim x < 0$.

Por lo tanto $\vdash x < 0 \supset (x = 0 \vee \ldots \vee x = \overline{k-1})$.

Paso de la Inducción

Supongamos que el Lema para todo $\bar{k}$ donde $k \leqslant m$.

Hay que demostrar $\vdash x < \overline{m+1} \supset (x = 0 \vee \ldots \vee x = \bar{m})$.

Por el axioma 12, $x < \overline{m+1} \vdash x < \bar{m} \vee x = \bar{m}$.

Por la hipótesis de la inducción $\vdash x < \bar{m} \supset (x = 0 \vee \ldots \vee x = \overline{m-1})$.
$\vdash (A \vee B) \supset ((A \supset C) \supset (C \vee B))$.
Luego $x < \overline{m+1} \vdash x = 0 \vee \ldots \vee x = \overline{m-1} \vee x = \bar{m}$.
Luego, por el Teorema de Deducción, $\vdash x < \overline{m+1} \supset (x = 0 \vee \ldots \vee x = \bar{m})$.

La μ-operación

Para mayor simplicidad consideraremos sólo funciones con dos argumentos.

Sea f una función de dos argumentos definibles en H mediante la fórmula $A(x, y, z)$ que satisface la condición de que para cada número natural m existe un número natural n tal que $f(m, n) = 0$.

Vamos a mostrar que la función g definida mediante la regla

$$g(m) = \mu n\{f(m, n) = 0\}$$

es definible en H mediante la fórmula

$$A(x, y, 0) \wedge \wedge z(z < y \supset \sim A(x, z, 0))$$

Abreviamos esta fórmula mediante $B(x, y)$.

Condición (iii)

Queremos mostrar que $\vdash B(x, y) \supset (B(x, z) \supset y = z)$.

$B(x, y)$ es $A(x, y, 0) \wedge \wedge z(z < y \supset \sim A(x, z, 0))$.
$B(x, z)$ es $A(x, z, 0) \wedge \wedge y(y < z \supset \sim A(x, y, 0))$.
Tenemos:

$$B(x, y), B(x, z), z < y \vdash A(x, z, 0) \wedge \sim A(x, z, 0)$$

y

$$B(x, y), B(x, z), y < z \vdash A(x, y, 0) \wedge \sim A(x, y, 0))$$

Luego $B(x, y), B(x, z) \vdash \sim z < y$ y $B(x, y), B(x, z \vdash \sim y < z$.
Luego por el axioma 11

$$B(x, y), B(x, z) \vdash y = z.$$

Luego $\vdash B(x, y) \supset (B(x, z) \supset y = z)$.

Por el Lema 56.14, solamente queda por mostrar que $\vdash B(\bar{m}, \overline{g(m)})$, es decir, que $\vdash A(\bar{m}, \overline{g(m)}, 0) \wedge \wedge z(z < \overline{g(m)} \supset \sim A(\bar{m}, z, 0))$.

Puesto que, *ex hypothesi* la función f es definible mediante la fórmula $A(x, y, z)$, tenemos, para todo par de números naturales m, n

$$\vdash A(\bar{m}, \bar{n}, \overline{f(m, n)}) \tag{1}$$

También tenemos *ex hypothesi*

Para cada número natural m existe un número natural n tal que $f(m, n) = 0$ (2)

y por definición

$$g(m) = \mu n\{f(m, n) = 0\} \tag{3}$$

A partir de 2 y 3 tenemos

$$f(m,\ g(m))=0 \text{ para todo número natural } m \tag{4}$$

A partir de 1 y 4 tenemos

$$\vdash \mathrm{A}(\bar{m},\ \overline{g(m)},\ 0) \tag{5}$$

que es el primer miembro de la conjunción que queremos demostrar.

A partir de 3 tenemos

Si $n<g(m)$ entonces $f(m,\ n)\neq 0$. (6)

Puesto que f es definible mediante $\mathrm{A}(x,\ y,\ z)$ y la condición (ii) de la definibilidad asegura que si $f(m,\ n)\neq 0$ entonces $\vdash \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ \bar{n},\ 0)$ a partir de 6 obtenemos

Si $n<g(m)$ entonces $\vdash \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ \bar{n},\ 0)$ (7)

1. Supongamos ahora que $g(m)=0$. Entonces, por el axioma 6 $\vdash \sim z<\overline{g(m)}$. Luego por lógica proposicional $\vdash z<\overline{g(m)} \supset \sim \mathrm{A}(m,\ z,\ 0)$. Luego por 45.4 $\vdash \wedge z(z<\overline{g(m)} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0))$. Luego:

Si $g(m)=0$, entonces $\vdash \wedge z(z<\overline{g(m)} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0))$ (8)

2. Supongamos que $g(m)>0$. Por $\mathrm{SQ}^{=}$ 2, $\vdash z=0 \supset (\sim \mathrm{A}(\bar{m},\ 0,\ 0) \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0))$. Luego por lógica proposicional $\vdash \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ 0,\ 0) \supset (z=0 \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0))$. Puesto que, *ex hypothesi*, $0<g(m)$, a partir de 7 obtenemos $\vdash \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ 0,\ 0)$. Luego por Modus Ponens $\vdash z=0 \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0)$. Y de igual manera sucede para cada $n<g(m)$. Por tanto:

$$\vdash (z=0 \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0)) \wedge \ldots \wedge (z=\overline{g(m)-1} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0)).$$

Por lógica proposicional

$$\vdash ((z=0 \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0)) \wedge \ldots \wedge (z=\overline{g(m)-1} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0)))$$
$$\supset ((z=0 \vee \ldots \vee z=\overline{g(m)-1} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0)).$$

Luego por Modus Ponens

$$\vdash (z=0 \vee \ldots \vee z=\overline{g(m)-1} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0) \tag{9}$$

A partir del Lema 56.15

$$\vdash z<\overline{g(m)} \supset (z=0 \vee \ldots \vee z=\overline{g(m)-1}) \tag{10}$$

A partir de 9 y 10

$$\vdash z<\overline{g(m)} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0)$$

Luego por 45.4

$$\vdash \wedge z(z < \overline{g(m)} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0)).$$

Luego:

Si $g(m) > 0$, entonces $\vdash \wedge z(z < \overline{g(m)} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0))$ (11)

A partir de 8 y 11

$$\vdash \wedge z(z < \overline{g(m)} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0)) \qquad (12)$$

A partir de 5 y 12, y por lógica proposicional

$$\vdash \mathrm{A}(\bar{m},\ \overline{g(m)},\ 0) \wedge \wedge z(z < \overline{g(m)} \supset \sim \mathrm{A}(\bar{m},\ z,\ 0))$$

Q.E.D.

Para recapitular:

56.16. *Toda función recursiva es definible en H*

Luego, dada la consistencia de H (secc. 55) y lo señalado en la secc. 54:

56.17. *Toda función recursiva está fuertemente representada en H*

56.18. *Toda función recursiva está representada en H*

56.19. *Todo conjunto recursivo de números naturales está representado en H*

De aquí que, asumiendo la Tesis de Church:

56.20. *Todo conjunto decidible de números naturales está representado en H*

Luego H es un sistema formal notable de la aritmética[8]. Luego por 51.10.

56.21. *H es indecidible*

Nota. Este resultado se establece bajo el supuesto de la Tesis de Church. (También podría objetarse que no hemos demostrado que H sea consistente.)

57. Demostración de la indecidibilidad de $SQ^{=}$. La indecidibilidad de SQ

H es una extensión finita de $SQ^{=}$ [Los axiomas de H son los axiomas de $SQ^{=}$ y los axiomas 2-24]. Luego, por 51.14 y 56.21:

57.1 *$SQ^{=}$ es indecidible*

Nota. Todavía estamos bajo el supuesto de la Tesis de Church.

H no es una extensión finita de SQ, puesto que H incluye entre sus axiomas los infinitos axiomas que son tales por el esquema de axioma $SQ^{=}$ 2, y éstos no son axiomas de SQ.

Hemos recurrido a axiomas por $SQ^{=}$ 2 en dos momentos de la demostración de que toda función recursiva es definible en H [pp. y]. Si pudiéramos quitar $SQ^{=}$ 2 de H y reemplazarlo por algún conjunto finito de axiomas y demostrar además que en el sistema resultante toda función recursiva es definible o, en otro caso, si pudiéramos mostrar, por ej., por inducción sobre el número de letras funcionales de una fórmula cualquiera, que aunque se haya quitado $SQ^{=}$ 2, la substitutividad general de la identidad es susceptible de demostración a partir de los restantes axiomas de H, entonces seríamos capaces de demostrar la indecidibilidad de SQ a partir de 51.14. Pero no existe ninguna forma fácil de hacer esto. Por ello nos contentaremos con demostrar la indecidibilidad de $SQ^{=}$, y establecer meramente, sin demostración:

[57.2] *SQ es indecidible*

Asimismo:

[57.3] *El conjunto de las fbfs de Q lógicamente válidas, que no contienen símbolos funcionales o constantes individuales, es indecidible*

Un sistema formal que tenga como teoremas exactamente ese conjunto de fbfs recibe a veces el nombre de 'cálculo de predicados puro'. [57.3] dice que tal cálculo es indecidible.

57.4 *El conjunto de los teoremas de $SQ^{=}$ [SQ] es efectivamente enumerable. Pero el conjunto de las fórmulas de Q que no son teoremas de $SQ^{=}$ [SQ] no es efectivamente enumerable*

Demostración

1. El conjunto de las fórmulas de $SQ^{=}$ es decidible y existe un método efectivo para establecer si algo es una demostración en $SQ^{=}$ o no lo es. Luego, por 51.11, los teoremas de $SQ^{=}$ son efectivamente enumerables. Y lo mismo pasa con SQ.

2. De la forma que se indica a continuación, podemos enumerar cadenas cualesquiera de símbolos de Q:

En primer lugar tomamos todas las cadenas que sólo tienen un símbolo. Hay doce cadenas de ese tipo: p, $'$, x, a, f, F, $*$, $\sim$, $\supset$, $\wedge$, $($, $)$. De ahora en adelante consideraremos que estos doce símbolos, tomados en ese orden, están ordenados lexicográficamente.

Tomamos todas las cadenas que tienen dos símbolos, en orden lexicográfico, es decir, en el orden

$$pp,\ p',\ px,\ pa \ldots,\ 'p,\ '',\ 'x \ldots,\ )\wedge,\ )(,\ )).$$

Después todas las cadenas de tres símbolos, las de cuatro, las de cinco, y así sucesivamente.

Asignemos el número 0 a la primera *fórmula* que aparezca en esta enumeración de cadenas cualesquiera [de hecho, la primera fórmula es p']. Asignemos el número 1 a la segunda fórmula que aparezca, el número 2 a la tercera, y así sucesivamente. Todas las fórmulas que aparezcan en algún lugar de la enumeración de las cadenas, y por lo tanto, todas las fórmulas, tendrán un número natural asignado, y cada número natural distinto estará asignado a una fórmula distinta.

Puesto que $SQ^{=}$ no es decidible, el conjunto de los teoremas de $SQ^{=}$ no es decidible. Por lo tanto, el conjunto de los números asignado por nuestra numeración a los teoremas de $SQ^{=}$ tampoco es decidible. Pero es efectivamente enumerable, puesto que los teoremas de $SQ^{=}$ son efectivamente enumerables, y la numeración es efectiva. Por lo tanto, por 51.5, el complemento relativo de este conjunto no es efectivamente enumerable; es decir, el conjunto de números de las fórmulas de Q que no son teoremas de $SQ^{=}$ no es efectivamente enumerable. Luego el conjunto de las fórmulas de Q que no son teoremas de $SQ^{=}$ no es efectivamente enumerable.

[Lo mismo sucede en el caso de SQ.]

Esto significa, desde un punto de vista informal, que es posible programar un ordenador para que vaya extrayendo uno a uno los teoremas de $SQ^{=}$ [SQ], sin que extraiga ninguna fórmula que no sea un teorema, y de tal forma que, tarde o temprano (sin tener en cuenta fallos mecánicos, el fin del mundo, etc.), extraerá toda fórmula que sea un teorema. Pero (como dice 57.4) no es posible hacer lo mismo con las fórmulas que no son teoremas. No existe ningún modo de programar un ordenador para que extraiga exclusivamente fórmulas que no sean teoremas, de forma que más tarde o más temprano toda fórmula que no sea un teorema sea extraída.

58. Subclases decidibles de fórmulas de Q lógicamente válidas. Forma normal prenexa. Forma normal de Skolem. Dos resultados negativos

Aunque SQ y $SQ^{=}$ son indecidibles, existen, para determinadas subclases de fórmulas de Q, métodos efectivos que permiten establecer si una fórmula de esa clase es, o no es, lógicamente válida (o, lo que es lo mismo, si una fórmula de la clase es, o no es, un teorema de SQ). Por ejemplo, la clase de las fórmulas de Q lógicamente válidas que sólo tienen conectivas y símbolos proposicionales, es decidible, por el método de tablas de verdad. Otra clase decidible es la clase de fórmulas de Q lógicamente válidas que no contienen símbolos funcionales y cuyos únicos símbolos predicativos son símbolos predicativos monádicos: en la secc. 50 hemos demostrado que esta clase es decidible.

Muchas de las subclases decidibles están definidas en términos de forma normal prenexa, que explicamos a continuación.

Forma normal prenexa

Si $\vee$ [el cuantificador existencial] fuera un símbolo de Q podríamos dar de la forma siguiente una definición simple de forma normal prenexa (Definición I):

> Una fórmula A está en forma normal prenexa sii es de la forma $Qv_1 \ldots Qv_n$ B, donde cada Q es $\wedge$, o $\vee$, $n \geqslant 0$, B es una fbf, y en B no aparece ningún cuantificador.

El B de esta definición recibe el nombre de *matriz* de A, y la parte de A (si es que hay alguna) que precede a la matriz recibe el nombre de *prefijo*.

Intuitivamente, una fórmula está en forma normal prenexa sii todos los cuantificadores aparecen sin negación en una fila al comienzo de la fórmula, y el alcance de cada cuantificador llega hasta el final de la fórmula.

Puesto que $\vee$ no es un símbolo de Q, adoptamos, en lugar de la anterior definición, la definición siguiente (Definición II):

Una fórmula de Q está en forma normal prenexa sii cuando, al reemplazar en ella cada cadena de símbolos de la forma por $\vee v$, el resultado es una fórmula que está en forma normal prenexa según la Definición I.

Ejemplos: Las siguientes fórmulas están en forma normal prenexa (admitiendo las abreviaturas usuales):

1. $\wedge x \sim \vee y \sim (Fx \supset Gy)$
2. $\wedge x \wedge y \sim \wedge z \sim \wedge w((p' \supset Fxy) \supset = Fzy)$
3. $Fxy \bigcup Fzy$
4. $p' \supset p''$

Las siguientes fórmulas *no* están en forma normal prenexa:

5. $\wedge x \sim \sim \wedge y \sim (Fx \supset Gy)$
6. $(\wedge x \wedge y \sim \wedge z \sim \wedge w(p' \supset Fxy) \supset = Fzy)$

   [El alcance de los cuantificadores no llega hasta el final de la fórmula: o, lo que es lo mismo, la parte de la fórmula que sigue a los cuantificadores:

   $$(p' \supset Fxy) \supset = Fzy)$$

   no es una fbf.] [*Nota:* En 6. *no* se han eliminado los paréntesis exteriores.]

7. $Fxy \supset \wedge z Fzy$
8. $\sim \wedge x(p' \supset p'')$

Nota. Algunas de las definiciones de forma normal prenexa exigen que las variables del prefijo sean distintas, y algunas exigen que la matriz contenga, para cada cuantificador del prefijo, al menos una aparición de la variable que dicho cuantificador liga. Estos requisitos no son necesarios para lo que nosotros pretendemos ahora.

Para cada una de las siguientes clases de fórmulas de Q existe un método efectivo para decir si una fórmula cualquiera de la clase es o no es, lógicamente válida (o lo que es lo mismo, si es o no es un teorema de SQ). [En las descripciones que siguen, 'cuantificador existencial' significa $\sim \wedge \ldots \sim$, y 'cuantificador universal' significa 'cuantificador universal distinto de uno que aparezca como parte de un cuantificador existencial'.]

[58.1] *Fórmulas, sin símbolos funcionales, en forma normal prenexa, en las que el prefijo contenga*

- (*a*) *ningún cuantificador, o*
- (*b*) *ningún cuantificador existencial, o*
- (*c*) *solamente cuantificadores existenciales, o*
- (*d*) *ningún cuantificador existencial delante de un cuantificador universal.*
- (*e*) *no más de un cuantificador existencial, o*
- (*f*) *no más de dos cuantificadores existenciales, de forma que no estén separados por ningún cuantificador universal.*

Los resultados (*a*)-(*d*) se deben a Bernays y Schönfinkel (1927), (*e*) a Ackermann (1928) y a Skolem (1928), independientemente, (*f*) a Kalmár (1932), Gödel (1933), y Schütte (1933), todos ellos independientemente.

[58.2] *Las fórmulas en forma normal prenexa en las cuales la matriz sea una disyunción de fbfs atómicas y/o negaciones de fbfs atómicas* [Herbrand, 1929, publ. en 1930]

También existen otras subclases decidibles, pero sus descripciones son más complicadas. Para detalles adicionales ver Hilbert y Ackermann, *Principles of Mathematical Logic*, secc. 12 Church (1956, secc. 46) o Ackermann (1954).

[58.1] y [58.2] tienen una aplicación más amplia de lo que cabría esperar, en virtud del siguiente teorema, que establecemos sin demostración:

[58.3] *Existe un método efectivo para encontrar, para cualquier fórmula A de Q, una fórmula A* de Q en forma normal prenexa tal que* $\vdash_{SQ} A \supset$ A/ y $\nvdash_{SQ} A^* \supset$ A, y por lo tanto tal que $\vdash_{SQ} A$ *sii* $\vdash_{SQ} A^*$. [*Puesto que* $\vdash_{SQ} A$ *sii* $\nvdash A$, *también tenemos . . . tal que* $\nvdash A \supset$ A/ *y* $\nvdash A^* \supset$ A/.]

Forma normal de Skolem

Una fórmula está en forma normal de Skolem sii es cerrada y no contiene ningún símbolo funcional, está en forma normal prenexa, y todos sus cuantificadores existenciales preceden a todos sus cuantificadores universales (naturalmente sin contar los cuantificadores universales que aparecen como partes de cuantificadores existenciales).

[58.4] *Si A es una fbf de Q sin símbolos funcionales o constantes individuales, entonces existe un método efectivo para encontrar una fbf B de Q en forma normal de Skolem tal que* $\vdash_{SQ}$A sii $\vdash_{SQ}$B [*o: '. . . tal que* $\nvdash$A sii $\nvdash$B] (N. B. Pero en contraste con [58.3] no tenemos necesariamente $\vdash_{SQ}$A ≡ B.) [Skolem, 1919].

Acabamos esta sección con dos resultados negativos.

Por [57.3] el conjunto de fbfs de Q lógicamente válidas que no tienen símbolos funcionales o constantes individuales es indecidible. A partir de [57.3] y de [58.4] se sigue que:

[58.5] *El conjunto de fbfs lógicamente válidas en forma normal de Skolem no es decidible*

Naturalmente, determinados subconjuntos de este conjunto son decidibles: cf. [58.1].

Hay un resultado aún más fuerte:

[58.6] *El conjunto de fbfs de Q lógicamente válidas que contienen sólo símbolos predicativos diádicos, sin símbolos funcionales ni constantes individuales, es indecidible* [Kalmár, 1936: cf. Löwenheim, 1915]

Más resultados negativos pueden encontrarse en Church (1956, secc. 47),

59. Cabos sueltos: Validez lógica y el dominio vacío. 2. Omega-inconsistencia y omega-incompletud. 3. Los teoremas de Gödel. 4. El Axioma de Elección. 5. Conjuntos recursivamente enumerables

Validez lógica y el dominio vacío

Hemos estado trabajando con una noción técnica de validez lógica según la cual una fórmula de Q es lógicamente válida sii es verdadera para toda interpretación con un *dominio no-vacío*. Pero (podría argüirse) nuestra definición técnica no capta satisfactoriamente una cierta noción intuitiva de validez lógica según la cual una fórmula es lógicamente válida sólo si es verdadera (en un sentido intuitivo) para *todas* las interpretaciones (en un sentido intuitivo), incluyendo las interpretaciones con un dominio vacío. Podría decirse: 'La lógica clásica certifica como lógicamente válidas (en su sentido) fórmulas que, en un sentido intuitivo, *no* son lógicamente válidas: por ej., según la lógica clásica, la fórmula

$$\vee xFx \vee \vee x \sim Fx$$

es lógicamente válida. Pero ¿es lógicamente válida esta fórmula en un sentido intuitivo? Supongamos que no existe nada en absoluto. Entonces, cualquiera que sea la propiedad asignada a F, no habría nada que tuviera o dejara de tener la propiedad. Luego para cualquier interpretación (en un sentido intuitivo) con un dominio vacío la fórmula sería falsa (en un sentido intuitivo)'.

Recientemente ha aumentado el interés por versiones de la teoría de la cuantificación que no excluyen el dominio vacío, y es posible que la teoría inclusiva de la cuantificación (tal y como se le llama) pueda en

algún momento llegar a superar a la teoría clásica que se contempla en este libro. Pero lo que principalmente nos interesa es la teoría clásica, por lo que damos simplemente una cita y una referencia. La cita es de Quine (1953):

> Una sencilla prueba adicional nos permite decidir en el momento que queramos, si una fórmula vale para el dominio vacío. Sólo tenemos que marcar las cuantificaciones universales como verdaderas y las existenciales como falsas, y aplicar consideraciones de tablas de verdad.

La referencia es a Meyer y Lambert (1967), quienes ofrecen un sistema axiomático para la teoría inclusiva de la cuantificación y una breve bibliografía.[9]

Omega-inconsistencia. Omega-incompletud

Sea S un sistema formal que tiene al conjunto de los números naturales como dominio de su interpretación propuesta. Entonces:

(1) Se dice que S es *ω-inconsistente* [omega-inconsistente] si existe una fbf A(v) de S, con una variable libre v, tal que $\vdash_S A(\tilde{n})$ para cada número natural *n* y también $\vdash_S \sim \wedge v A(v)$. Se dice que S es *ω-consistente* si no existe tal fbf.

Si una teoría de primer orden es ω-consistente entonces es consistente, pero la inversa no es verdadera.

(2) Se dice que S es ω-incompleto [omega incompleto] si existe una fbf A(v) de S, con una variable libre v, tal que $\vdash_S A(\tilde{n})$ para cada número natural *n* pero $\vee v A(v)$ no es un teorema de S. Se dice que S es *ω-completo* si no existe tal fbf.

Los teoremas de Gödel

1. *El teorema de completud de Gödel*

En su artículo '*Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*'[10] [1930] Gödel demostró la completud (semántica) de un sistema de la lógica de predicados de primer orden que era esencialmente el de los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. En el curso de la demostración mostró también que todo conjunto consistente de fbfs del sistema es simultáneamente satisfactible en un dominio numerable, lo que constituye un resultado clave para el trabajo posterior.

2. *El (primer) teorema de incompletud de Gödel*

En su artículo '*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*' (1930, publ. en 1931) Gödel demostró que cualquier sistema formal S que satisfaga las tres condiciones siguientes:

1. S es ω-consistente
1. S tiene un conjunto recursivamente definible de axiomas y reglas de inferencia
3. Toda relación recursiva es definible en S

es incompleto, en el sentido de que existe una fbf cerrada de S, de la forma $\wedge$vFv tal que ni $\vdash_S \wedge$vFv ni $\vdash_S \sim \wedge$vFv, en donde, bajo la interpretación propuesta, se asigna a F una propiedad recursivamente definida de los números naturales.

Este es el teorema de Gödel más famoso y el único al que se hace referencia normalmente cuando se habla del 'Teorema de Gödel'.

3. *Segundo teorema de incompletud de Gödel (también llamado 'Segundo Teorema de Gödel')*

En su artículo de 1931 Gödel se ocupó principalmente de un sistema formal que era esencialmente el resultado de la lógica (de orden superior) de los *Principia Mathematica* los axiomas de Peano para la aritmética. El mostró que en el caso de que el sistema fuera consistente una fórmula determinada del sistema que pudiera interpretarse como si afirmara la consistencia del sistema no era un teorema del sistema. Este es el segundo teorema de incompletud de Gödel. Gödel también hizo el anuncio, más general, de que para este sistema (y para otros dos, uno de los cuales era la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel) la consistencia del sistema no es susceptible de demostración dentro del sistema, siendo el sistema consistente. Este anuncio, o alguna generalización suya, puede también encontrarse descrito como (segundo teorema de incompletud de Gödel'. Sin embargo, Feferman (1956-7) mostró, para un sistema formal de la aritmética de Peano, que existe una fórmula que en un sentido expresa la consistencia del sistema y que es un teorema del sistema. Luego hay que tener cuidado a la hora de establecer qué es lo que se ha demostrado en este área. Cf. también Mendelson, pp. 148-9, y Andrzej Mostowski (1964, pp. 23-6).

El Axioma de Elección

Existen formas de establecerlo (de hecho, hay un libro entero, de H. y J. Rubin, dedicado a *Equivalents of the Axiom of Choice* (Formulaciones

equivalentes del Axioma de Elección). La siguiente es una versión sencilla:

> Para cualquier conjunto de conjuntos disjuntos no-vacíos [es decir, conjuntos que no tienen en común ningún elemento], existe un conjunto que tiene como elementos suyos exactamente un elemento de cada uno de esos conjuntos disjuntos.

Otra versión es:

> Para cualquier conjunto S de conjuntos no-vacíos, existe una función que asigna a cada elemento X de S un elemento de X. [La función entresaca de cada conjunto X (y puede haber una cantidad infinita de éstos un elemento de X: luego puede ser necesaria una cantidad infinita de elecciones. De aquí el nombre del axioma.]
>
> (Esta versión no exige que los elementos de S sean disjuntos.)

El axioma no sólo se usa en la teoría de conjuntos, sino también en la teoría de números transfinitos, en topología y en teoría de la medida. Es independiente de los demás axiomas de la teoría de conjuntos (suponiendo que esos otros axiomas son consistentes) [Cohen, 1963. Gödel demostró en 1938 que no podía ser refutado a partir de los restantes axiomas].

'El axioma de elección es probablemente el axioma más interesante y, a pesar de su tardía aparición, el más discutido de la matemática, cediendo el primer puesto solamente al axioma de las paralelas de Euclides' (Fraenkel y Bar-Hillel, 1958, p. 47, que presenta parte de la historia del axioma). Con anterioridad a la larga discusión de Fraenkel y Bar-Hillel (pp. 44-80), existen estudios relativamente simples del axioma en Russell (1919, cap. XII) (donde recibe el nombre de 'axioma multiplicativo'), Rosenbloom (1950, pp. 146-51), y Suppes (1960, cap. 8). J. B. Rosser en su *Logic for Mathematicians* (Lógica para Matemáticos), pp. 510-12, plantea la cuestión de 'en qué medida es indispensable el Axioma de Elección'. La Teoría de Conjuntos no-Cantoriana [es decir, la teoría de conjuntos con la negación del axioma de elección, que reemplaza de alguna forma al axioma de elección][11] es el tema de un claro y sencillo artículo de Paul Cohen y Reuben Hersh en la revista *Scientific American* [Cohen y Hersh, 1967]. Ver también la obra de Cohen *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (La Teoría de Conjuntos y la Hipótesis del Continuo).

Conjuntos recursivamente enumerables

Por la Tesis de Church, un conjunto recursivamente enumerable de números naturales es el conjunto, definido con precisión, que es equivalen-

te a un conjunto efectivamente enumerable de números naturales. Una de las formas de definir un conjunto recursivamente enumerable es la siguiente:

Un conjunto de números naturales es *recursivamente enumerable* sii es vacío o es el rango de una función recursiva.

Desde el punto de vista intuitivo (y asumiendo la Tesis de Church), un conjunto es recursivamente enumerable sii es vacío o existe un método efectivo que permite generar sus elementos uno por uno.

Emil Post, en un elegante artículo [Post, 1944], toma la noción de conjunto recursivamente enumerable como punto de partida de una teoría general de los problemas de decisión. Pueden encontrarse otras explicaciones bastante sencillas de la teoría de las funciones recursivas y de la decidibilidad, en cuyo planteamiento los conjuntos recursivamente enumerables están muy cerca del meollo del asunto, en Davis (1966 y 1967) y en Rogers (1957). Cf. también Mostowski (1964, p. 39).

Apéndice 2. Resumen de resultados metateoréticos básicos para teorías de primer orden

'Demostración de consistencia [completud, decidibilidad, etc.]' es una abreviación de 'Se ha demostrado que algún sistema formal de ... es consistente [completo, decidible, etc.].'

I. LÓGICA

A. *Lógica proposicional veritativo-funcional*

Demostración de consistencia, completud semántica, completud sintáctica, decidibilidad. (Post, 1920)

No es completa respecto de la negación.

B. *Lógica de predicados monádicos de primer orden*

Demostración de consistencia, completud semántica, decidibilidad (Löwenheim, 1915).

No es sintácticamente completa o completa respecto de la negación.

C. *Lógica de predicados de primer orden (con o sin identidad)*

Demostración de consistencia (Hilbert y Ackermann, 1928), completud semántica (Gödel, 1930), indecidibilidad (Church, 1936; suponiendo la Tesis de Church).

No es sintácticamente completa, o completa respecto de la negación.

Gottlob Frege, en su *Begriffsschrift* (1878, publ. en 1879) fue el que presentó por primera vez un conjunto completo de axiomas y reglas para la lógica de predicados de primer orden.

II. Teorías de Primer Orden en General

A. Teorema de Löwenheim-Skolem: Toda teoría de primer orden que tiene un modelo tiene un modelo enumerable (Löwenheim, 1915 - Skolem, 1919).

B. Toda teoría consistente de primer orden tiene un modelo (Gödel, 1930).

III. Teorías Matemáticas[15]

1. *Teoría elemental de números con adición pero sin multiplicación*

Demostración de consistencia, completud respecto de la negación, decidibilidad (Presburger, 1929).

2. *Teoría elemental de números con multiplicación, pero sin adición*

Demostración de consistencia, completud respecto de la negación, decidibilidad. (Skolem, 1930)

3. *Algebra elemental de los números reales, con adición y multiplicación, y con todos y cada uno de los números naturales, pero sin la noción general de número natural*

Demostración de consistencia, completud respecto de la negación, decidibilidad. (Tarski, 1930, publ. en 1948)

4. *Geometría elemental, con todos y cada uno de los números naturales, pero sin la noción general de número natural*

Demostración de consistencia, completud respecto de la negación, decidibilidad. (Tarski, 1930, publ. en 1948).

5. *Teoría elemental de números, con adición, multiplicación, cada uno de los números naturales y con la noción general de número natural*

Demostración de consistencia (Gentzen, 1935, apelando a un principio [de inducción transfinita] que no pertenece ni a la lógica de predicados de primer orden ni a la misma teoría elemental de números, y por lo tanto es tan cuestionable como la teoría en cuya demostración de consistencia se utiliza). Demostración de que cualquier formalización consistente de la teoría con un método efectivo que permita establecer si algo es, o no es, una demostración en el sistema, es semánticamente incompleta (generalización de Gödel, 1930, publ. en 1931, que exigía la ω-consistencia y un conjunto recursivo primitivo de axiomas. Rosser mostró en 1936 que la ω-consistencia podía ser reemplazada por la consistencia. La formulación que presentamos implica una apelación a la Tesis de Church). Demostración de indecidibilidad (Church, 1936; asumiendo la Tesis de Church y la consistencia del sistema).

6. *Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Teoría de conjuntos de Von Neumann-Bernays-Gödel*

No hay una demostración de consistencia. Demostración de que si es consistente, entonces es incompleta (Gödel, 1930, publ. 1931) e indecidible (corolario de Church, 1936).

NOTAS A LA CUARTA PARTE

[1] Gran parte de lo que se presenta en esta sección ha sido tomado de Shepherdson (1967, esp. p. 3 y nota).

[2] Esta presentación de las funciones recursivas se apoya marcadamente en Andrej Grzegorczyk (1961, cap. I). Puede encontrarse una presentación más completa de las funciones recursivas en Péter (1951), Kleene (1952), Hermes (1961), Rogers (1967). Cf. también Davis (1958), y sobre algoritmos en general, Markov (1954).

[3] Para evitar más adelante complicaciones formales, estableceremos que 0^0, que normalmente se deja sin definir, sea por definición igual a 1.

[4] '$n \in X$' significa 'n es un elemento del conjunto X'.

[5] En la interpretación propuesta, 21 significa: 'Para todo número natural x, $x^0 = 1$'.

[6] En la interpretación propuesta, 22 significa: 'Para todo par de números naturales x e y, $x^{y+1} = x^y \cdot x$.'

[7] Esta parte de la demostración sigue estrechamente la demostración de Grzegorczyk de que toda relación recursiva está fuertemente representada en su sistema Ar (*Fonctions récursives*, cap. V).

[8] Dado que, naturalmente, satisface las demás condiciones de la notabilidad.

[9] Los Kneale manifiestan su desacuerdo (1962, pp. 706-7) arguyendo que 'La reserva mediante la cual se excluyen de toda consideración los dominios vacíos... en realidad no constituye ninguna restricción en absoluto, puesto que no puede haber ningún dominio de individuos que esté vacío'.

[10] Trad. inglesa de J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel.*

[11] La hipótesis generalizada del continuo implica el axioma de elección. Luego la Teoría de Conjuntos no-Cantoriana tiene como teorema la negación de la hipótesis generalizada del continuo.

Referencias

ACKERMANN, WILHELM (1896-1962)

1927 'Zum Hilbertschen Aufbau der reelen Zahlen', *Mathematische Annalen*, vol. 99 (1928) 118-33. Recibido el 20 de Enero de 1927. Trad. inglés en van Heijenoort, pp. 495-507.

1928 'Uber die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke', *Mathematische Annalen*, vol. 100 (1928) 638-49.

1954 *Solvable Cases of the Decision Problem* (North-Holland, Amsterdam, 1954).

ANDERSON, ALAN ROSS (1925-1973) y BELNAP, NUEL DINSMORE (b. 1930)

1959 'A simple treatment of truth functions', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 24 (1959) 301-2.

BERNAYS, PAUL (nac. 1888) y SCHÖNFINKEL, MOSES ( )

1927 'Zum Entscheidunsproblem der mathematischen Logik', *Mathamatische Annalen*, vol. 99 (1928) 342-72.
Recibido el 24 de Marzo de 1927.

CANTOR, GEORG (1845-1918)

1873 'Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen', *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 77 (1874) 258-62. Fechado en Berlín el 24 de Diciembre de 1873. Reimpreso en Cantor (1932, pp. 115-18).

1877 'Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre', *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 84 (1878) 242-58. Fechado en Halle, el 11 de Julio de 1877. Reimpreso en Cantor (1932, pp. 119-33).

1895, 1897 'Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre', *Mathematische Annalen*, vol. 46 (1895) 481-512; vol. 49 (1897) 207-46. Reimpreso en Cantor (1932, pp. 282-351). Hay una traducción al inglés con el título *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (Open Court, Chicago, 1915; Dover, New York, 1952).

1932 Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen, ed. E. Zermelo (Springer, Berlin, 1932). Reimpreso por Georg Olms Verlagsbuchhandlung (Hildesheim, 1962).

CHURCH, ALONZO (nac. 1903)

1935*a* 'An unsolvable problem of elementary number theory. Preliminary report', *Bulletin of the American Mathematical Society* (Mayo de 1935), vol. 41, pp. 332-3. Recibido el 22 de Marzo de 1935.

1935*b* 'An unsolvable problem of elementary number theory', *American Journal of Mathematics*, vol. 58 (1936) 345-63. Presentado a la Sociedad el 19 de Abril de 1935. Reimpreso en Davis (1965, pp. 89-107).

1936 'A note on the Entscheidungsproblem', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1 (1936) 40-1 (corrección pp. 101-102). Recibido el 15 de Abril de 1936. Corrección recibida el 13 de Agosto de 1936. Reimpreso en Davis (1965, pp. 110-15).

1956 *Introduction to Mathematical Logic* (Princeton University Press, 1956).

COHEN, PAUL JOSEPH (nac. 1934)

1963 'The independence of the continuum hypothesis', *Proceedings of the National Academy of Sciencies of the U.S.A.*, vol. 50 (1963) 1143-8; vol. 51 (1964) 105-10. Recibido el 30 de Septiembre de 1963.

1966 *Set Theory and the Continuum Hypothesis* (W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966).

COHEN, PAUL JOSEPH (nac. 1934) y HERSH, REUBEN

1967 'Non-Cantorian Set Theory', *Wcientific American*, vol. 217, no. 6 (Dic. 1967) 104-6, 111-16. Reimpreso en Morris Kline (ed.), *Mathematics in the Modern World* (W. H. Freeman and Company, . 6 (Dic. 1967) 104-6, 111-16. Reimpreso en Morris Kline (ed.), *Mathematics in the Modern World* (W. H. Freeman and Company, San Francisco and London, 1968) pp. 212-20.

DAVIS, MARTIN (nac. 1928)

1958 *Computability and Unsolvability* (McGraw-Hill, New York, 1958).

1965 (ed.), *The Undecidable* (Raven Press, Hewlett, N.Y., 1965).

1966 'Recursive Functions - An Introduction', en E. R. Caianiello (ed.), *Automata Theory* (Academic Press, New York and London, 1966) pp. 153-63.

1967 'Recursive Function Theory', en Paul Edwards (ed.) *Encyclope-*

dia of Philosophy, vol. 7 (Macmillan and Free Press, New York, 1967) 89-95.

DEDEKIND, RICHARD (1931-1916)

1887 *Was sind und was sollen die Zahlen*? (Vieweg, Brunswick, 1888). Prefacio con fecha del 5 de Octubre de 1887. Traducción al inglés en Richard Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers* (Open Court, Chicago, 1901; Dover, New York, 1963).

FEFERMAN, SALOMON (nac. 1928)

1956-7 'Formal consistency proofs and interpretability of theories', tesis doctoral, Berkeley, 1957. Resúmenes en el *Journal of Symbolic Logic*, vol. 22 (1957) 106-7 (recibido para publicación en 1956).

'Formal consistency proofs and interpretability of theories', *Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic, Cornell University*, 1957, pp. 71-7.

'Arithmetization of metamathematics in a general setting', *Fundamenta Mathematicae*, vol. 49 (1960) 35-92. Recibido el 10 de Diciembre de 1959.

FITCH, FREDERIC BRETON (nac. 1908)

1938 'The consistency of the ramified *Principia*', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 3 (1938) 140-9.

FRAENKEL, ABRAHAM ADOLF (1891-1965)

1961 *Abstract Set Theory*, 2nd ed. (North-Holland, Amsterdam, 1961).

FRAENKEL, ABRAHAM ADOLF (1891-1965) y BAR-HILLEL, YEHOSHUA (nac. 1915)

1958 *Foundations of Set Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1958).

FREGE, FRIEDICH LUDWIG GOTTLOB (1848-1925)

1878, pub. 1879 *Begriffsschrift* (Louis Nebert, Halle, 1879). Prefacio con fecha del 10 de Diciembre de 1878. Traducción al inglés en Van Heijenoort, pp. 5-82.

GALILEO (1564-1642)

1638 *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze* (The Elseviers, Leiden, 1638). Hay una traducción inglesa con el título *Dialogues concerning Two New Sciences* (Macmillan, New York, 1914; Dover, New York, 1960, véase 'Primer Día', pp. 31-2).

GENTZEN, GERHARD (1909-45)

1935 'Die Widerspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie', *Mathematische Annalen*, vol. 112 (1936) 493-565.

Recibido el 11 de Agosto de 1935; hechos algunos cambios en Febrero de 1936. Hay traducción al inglés en *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, ed. M. E. Szabo (North-Holland, Amsterdam and London, 1969).

GÖDEL, KURT (1906-1978)

1930 'Über die Vollständigkeit des Logikkalküls', tesis doctoral, University of Vienna. Graduación aprobada el 6 de Febrero de 1930.

'Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls', *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 37 (1930) 349-60. Traducción al inglés en Van Heijenoort, pp. 583-91.

1930, pub. 1931 'Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I', *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38 (1931) 173-98. Recibido para su publicación el 17 de Noviembre de 1930. Resumen presentado a la Academia de Ciencias de Viena el 23 de Octubre de 1930. Traducción inglesa en van Heijenoort, pp. 595-616.

1933 'Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls', *Monatschefte für Mathematik und Physik*, vol. 40 (1933) 433-43.

1934 lectures *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems*, notas de S. C. Kleene y J. B. Rosser de las lecciones pronunciadas en el Institute for Advanced Study, Princeton, durante la primavera de 1934. Impreso con correcciones y con una nota final en Davis (1965, pp. 39-74).

1938 'The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis', *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.*, vol. 24 (1938) 556-7. Cfr. también su *The Consistency of the Continuum Hypothesis* (Princeton University Press, 1940) (notas de las lecciones pronunciadas en 1938).

GRZEGORCZYK, ANDRZEJ

1961 *Fonctions récursives* (Gauthier-Villars, París; Nauwelaerts, Louvain, 1961).

HARROP, RONALD (n. 1926)

1964 'Some structure results for propositional calculi', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 30 (1965) 271-92. Presentado en Julio de 1964.

HENKIN, LEON (nac. 1921)

1947 'The completeness of formal system', tesis doctoral, Princeton, 1947. Parte publicada en 'The completeness of the first-order functional calculus', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 14 (1949)

159-66 (reimpreso en Hintikka, 1969, pp. 42-50). Otra parte en Henkin (1950) (reimpreso en Hintikka, 1969, pp. 51-63).

1950 'Completeness in the theory of types', *Journal of Symbolic Logic*, vol 15 (1950) 81-91. Recibido el 11 de Marzo de 1949. Reimpreso en Hintikka (1969, pp. 51-63). Parte de su tesis doctoral (1947).

HERBRAND, JACQUES (1908-31)

1929, publicado en 1930 'Recherches sur la théorie de la démonstration', tesis doctoral para la University of Paris, publicado en *Travaux de la société des sciences et des lettres de Varsovie*, Classe III, Sciences mathématiques et physiques, Nr 33 (Warsaw, 1930) 128 pp. Tiene fecha del 14 de Abril de 1929. Reimpreso en sus *Ecrits logiques* (Presses Universitaires de France, Paris, 1968) pp. 35-153. Para la demostración del Teorema de Deducción, ver párrafo 2.4 del capítulo 61 en el original, pp. 90-1 en la reimpresión de 1968). Hay una traducción al inglés del capítulo 5 en Van Heijenoort, pp. 529-67.

HERMES, HANS (*b.* 1912)

1961 *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit* (Springer, Berlin, 1961). Trad. Ingl. con el título *Enumerability, Decidability, Computability* (Springer, Berlin, 1965.

HILBERT, DAVID (1862-1943)

1904 Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik', *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom* 8. *bis* 13. *August* 1904 (Teubner, Leipzig, 1905). Traducción al inglés en Van Heijenoort, pp. 129-38.

1925 'Über das Unendliche' (conferencia pronunciada en Münster el 4 de junio de 1925), *Mathematische Annalen*, vol. 95 (1926) 161-90. Traducción al inglés Van Heijenoort, pp. 369-92.

1927 'Die Grundlagen der Mathematik' (artículo para el seminario de Hamburgo, Julio de 1927), *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, vol. 6 (1928) 65-85. Reimpreso en su libro *Die Grundlagen der Mathematik* (Teubner, Leipzig, 1928) y en su *Grundlagen der Geometrie* (Teubner, Leipzig and Berlín, 1930). Traducción al inglés en van Heijenoort, pp. 464-79.

HILBERT, DAVID (1862-1943) y ACKERMANN, WILHELM (1896-1962)

1928 *Grundzüge der Theoretischen Logik* (Springer, Berlin, 1928). Traducción al inglés de la segunda edición (1938) con el título *Principles of Mathematical Logic* (Chelsea Publishing Co., New

York, 1950). [Trad. cast. *Lógica Matemática Elemental.* Madrid, Tecnos, 1974].

HINTIKKA, KAARLO JAAKKO JUHANI (nac. 1929)

1969 (ed.), *The Philosophy of Mathematics* (Oxford University Press, 1969).

HIZ, HENRY (nac. 1917)

1957 'Complete Sentential Calculus Admitting Extensions', *Summaries of talks presented at the Summer Institute for Symbolic Logic, Cornell University*, 1957, pp. 260-2. Resumen en *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 5 (1958) 29. 'Extendible sentential calculus', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 24 (1959) 193-202.

HOBBES, THOMAS (1588-1679)

1656 *Six Lessons to the Professors of the Mathematiques... in the University of Oxford* (Andrew Crook, London, 1956).

HUGHES, GEORGE E. and CRESSWELL, M. J.

1968 *An Introduction to Modal Logic* (Methuen, London, 1968). [Trad. cast. *Introducción a la Lógica Modal*, Madrid, Tecnos, 1973].

KALMÁR, LÁSZLÓ (nac. 1905)

1932 'Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten', *Mathematische Annalen*, vol. 108 (1933) 466-484. Recibido el 3 de Septiembre de 1932.

1935 'Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls', *Acta Scientiarum Mathematicarum*, vol. 7 (1934-5) 222-243. Recibido el 21 de Marzo de 1935.

1936 'Zurückführung des Entscheidungsproblem auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären, Funktions-variablen', *Compositio Mathematica*, vol. 4 (1936-7) 137-144. Recibido el 22 de Mayo de 1936.

KLEENE, STEPHEN COLE (nac. 1909)

1952 *Introduction to Metamathematics* (North-Holland, Amsterdam; P. Noordhoff, Groningen; Van Nostrand, New York, 1952, etcétera). [Trad. cast. *Introducción a la Metamatemática*, Madrid, Tecnos, 1974].

1967 *Mathematical Logic* (Wiley, New York, 1967).

KNEALE, WILLIAM CALVERT (nac. 1906) and KNEALE, MARTHA (nac. 1909)

1962 *The Development of Logic* (Clarendon Press, Oxford, 1962). [Trad. cast. *El Desarrollo de la Lógica.* Madrid, Tecnos 1972].

LEBLANC, HUGUES (nac. 1924)
1966 *Techiques of Deductive Inference* (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966).
LEMMON, EDWARD JOHN (1930-66)
1965 *Beginning Logic* (Nelson, London y Edinburgh, 1965).
LINDENBAUM, ADOLF (1904-41)
Para el Lema de Lindenbaum, cfr. Alfred Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, p. 98, Teorema 56.
Ł/OS, JERZY
1951 'An algebraic proof of completeness for the twovalued propositional calculus', *Colloquium Mathematicum*, vol. 2 (1951) 236-40.
LÖWENHEIM, LEOPOLD (1878-*c.* 1940)
1915 'Über Möglichkeiten im Relativkalkül', *Mathematische Annalen*, vol. 76 (1915) 447-70. Traducción al inglés en van Heijenoort, pp. 232-51.
Ł/UKASIEWICZ, JAN (1878-1956)
1929 *Elementy logiki matematycznej*, lithographed (Warsaw, 1929). Traducción al inglés de la segunda edición (ed. J. Slupecki) con el título de *Elements of Mathematical Logic* (Pergamon, Oxford, 1963).
MARGARIS, ANGELO
1967 *First Order Mathematical Logic* (Blaisdell Publishing Company (Ginn and Co.), Waltham, Mass., 1967).
MARKOV, ANDREI ANDREEVICH (el más joven) (nac. 1903)
1951 'The theory of algorithms' (in Russian), *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova*, vol. 38 (1951) 176-89.
1954 'The theory of algorithms' (in Russian), *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova*, vol. 42 (1954). Traducción al inglés en Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.
MATES, J. R. BENSON (nac. 1919)
1953 *Stoic Logic* (University of California Press, Berkeley y Los Angeles, 1953).
1965 *Elementary Logic* (Oxford University Press, 1965). [Trad. cast. *Lógica Matemática Elemental*. Madrid, Tecnos 1974].
MENDELSON, ELLIOTT
1964 *Introduction to Mathematical Logic* (Van Nostrand, Princeton, 1964).
MEYER, ROBERT K. and LAMBERT, KAREL (nac. 1928)
1967 'Universally free logic and standard quantification theory',

Journal of Symbolic Logic, vol. 33 (1968) 8-26. Recibido el 9 de Febrero de 1967.

MOSTOWSKI, ANDRZEJ (nac. 1975)

1964 'Thirty years of foundational studies', *Acta Philosophica Fennica* fasc. XVII (1965); también en Blackwell, Oxford, 1966. Lecciones pronunciadas en 1964.

PEANO, GIUSEPPE (1858-1932)

1889 *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (en latín) (Turin, 1889) XVI + 20 pp. Traducción parcial al inglés en Van Heijenoort, pp. 85-97.

PEIRCE, CHARLES SANDERS (1839-1914)

1867-1911 *Collected Papers*, ed. Charles Hartshorne and Paul Weiss, vols. III y IV (Harvard University Press, 1933).

PÉTER, RÓZSA (nac. 1905)

1951 *Rekursive Funktionen* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951). Hay una traducción al inglés de la tercera edición, revisada, con el título *Recursive Functions* (Academic Press, New York and London, 1967).

POST, EMIL LEON (1897-1954)

1920 Tesis doctoral, Columbia University, 1920. Resumen presentado en una reunión de la American Mathematical Society, el 24 de Abril de 1920. Publicado con el título 'Introduction to a general theory of elementary propositions', en *American Journal of Mathematics*, vol. 43 (1921) 163-85. Reimpreso en Van Heijenoort, pp. 265-83.

1936 'Finite combinatory processes. Formulation I', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1 (1936) 103-5. Recibido el 7 de Octubre de 1936. Reimpreso en Davis (1965, pp. 289-91).

1942, pub. 1943 'Formal reductions of the general combinatorial decision problem', *American Journal of Mathematics*, vol. 65 (1943) 197-215. Recibido el 14 de Noviembre de 1941. Revisado el 11 de Abril de 1942.

1944 'Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems', *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 50 (1944) 284-316. Presentado a la Sociedad el 26 de Febrero de 1944. Reimpreso en Davis (1965, pp. 305-37).

PRESBURGER, MOJŻESZ

1929 'Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt', *Sprawozdanie z I Kongresu matematyków krajów slowiańskich, Warszawa*, 1929 (Warsaw, 1930) pp. 92-101, 395.

QUINE, WILLARD VAN ORMAN (nac. 1908)

1934-60 *Selected Logic Papers* (Random House, New York, 1966).

1937 'Completeness of the propositional calculus', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 3 (1938) 37-40. Recibido el 13 de Septiembre de 1937. Reimpreso en su libro *Selected Logic Papers*, pp. 159-163.

1940 *Mathematical Logic* (Harvard University Press, 1940). [Trad. cast. *Lógica Matemática*, Madrid, Revista de Occidente, 1972].

1953 'Quantification and the empty domain', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 19 (1954) 177-9. Recibido el 28 de Septiembre de 1953. Reimpreso en su libro *Selected Logic Papers*, pp. 220-3.

ROBINSON, ABRAHAM (mur. 1974)

1966 *Non-standard Analysis* (North-Holland, Amsterdam, 1966).

ROBINSON, RAPHAEL MITCHEL (nac. 1911)

1950 'An essentially undecidable axiom system', *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Massachusetts*, 1950 (American Mathematical Society, Providence, R.I., 1952), vol. I, pp. 729-730.

ROGERS, HARTLEY

1957 'The present theory of Turing machine computability', *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* [*S.I.A.M. Journal*], vol. 7 (1959) 114-30. Lección pronunciada en 1957. Reprinted in Hintikka (1969, pp. 130-46).

1967 *Theory of Recursive Functions and Effective Computability* (McGraw-Hill, New York, 1967).

ROSENBLOOM, PAUL C. (nac. 1920)

1950 *Elements of Mathematical Logic* (Dover, New York, dated 1950, pub. 1951).

ROSSER, JOHN BARKLEY (nac. 1907)

1936 'Extensions of some theorems of Gödel and Church', *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1 (1936) 87-91. Presentado a la Association for Symbolic Logic y a la American Mathematical Society, el 1 de Septiembre de 1936. Recibido para su publicación el 8 de septiembre de 1936. Reimpreso en Davis (1965, pp. 231-5).

1953 *Logic for Mathematicians* (McGraw-Hill, New York, 1953).

RUBIN, HERMAN y RUBIN, JEAN E.

1963 *Equivalents of the Axiom of Choice* (North-Holland, Amsterdam, 1963).

RUSSELL, BERTRAND ARTHUR WILLIAM (1872-1970)

1919 *Introduction to Mathematical Philosophy* (Allen and Unwin,

London, 1919). [Tr. cast. *Introducción a la Filosofía Matemática*, Buenos Aires, Losada.]

SCHÜTTE, KURT (nac. 1909)

1933 'Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik', *Mathematische Annalen*, vol. 109 (1934) 572-603. Recibido el 30 de Junio de 1933.

1950 'Schlussweisen-Kalküle der Prädikaten Logik', *Mathematische Annalen*, vol. 122 (1950), 47-65.

1954 'Ein System des verknüpfenden Schliessens', *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, vol. 2 (1956) 55-67. Recibido el 9 de Diciembre de 1954.

SHEFFER, HENRY MAURICE (1883-1964)

1912 'A set of five independent postulates for Boolean algebras, with applications to logical constants', *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 14 (1913) 481-8. Presentado a la Sociedad el 13 de Diciembre de 1912.

SHEPHERDSON, JOHN CEDRIC (nac. 1926)

1967 'Algorithms, Turing Machines and Finite Automata; An Introductory Survey', en D. J. Stewart (ed.), *Automaton Theory and Learning Systems* (Academic Press, London and New York, 1967) pp. 1-22.

SHOENFIELD, JOSEPH R. (nac. 1927)

1967 *Mathematical Logic* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967).

SKOLEM, THORALF (1887-1963)

Todos los artículos de Skolem reseñados a continuación pueden encontrarse, en alemán, en sus *Selected Works in Logic*, ed. J. E. Fenstad (Universitets-forlaget, Oslo-Bergen-Tromsö, 1970).

1919 'Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen', *Videnskapsselskapets Skrifter*, I. Matematisk-naturvidenskabelig Klasse, 1920, no. 4 (Kristiania, 1920) 36 pp. Presentado el 21 de Marzo de 1919. Traducción al inglés de la §1 en Van Heijenoort, pp. 254-63.

1922 'Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre', *Conférences faites au cinquième congrès des mathématiciens scandinaves tenu à Helsingfors du 4 au 7 juillet* 1922 (Helsingfors, 1923). Primera publicación de la Paradoja de Skolem. Traducción al inglés en van Heijenoort, pp. 291-301.

1923 'Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich', *Videnskapsselskapets*

Skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig Klasse, 1923, no. 6 (Kristiania, 1923) 38 pp. Traducción al inglés en Van Heijenooort, pp. 303-33.

1928 'Über die mathematische Logik', *Norsk matematisk tidsskrift*, vol. 10 (1928) 125-42. Lección pronunciada el 22 de Octubre de 1928. Traducido al inglés en Van Heijenoort, pp. 512-24.

1930 'Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik' *Skrifter Utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo*, I. Mat.-Naturv. Klasse, 1930, no. 7 (Oslo, 1931). Presentado el 12 de Septiembre de 1930.

1933 'Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems [D. h. wenn die Begriffe 'Menge' oder 'Aussagenfunktion' präzisiert werden]', *Norsk Matematisk Forenings Skrifter*, serie II, Nr. 10, pp. 73-82 (Oslo, 1933).

1934 'Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen', *Fundamenta Mathematicae*, vol. 23 (1934) 150-61.

SMULLYAN, RAYMOND M.

1968 *First-Order Logic* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968).

STOLL, ROBERT R.

1963 *Set Theory and Logic* (W. H. Freeman, San Francisco, 1963).

STRAWSON, PETER FREDERICK (nac. 1919)

1952 *Introduction to Logical Theory* (Methuen, London; Wiley, New York, 1952).

SUPPES, PATRICK (nac. 1922)

1957 *Introduction to Logic* (Van Nostrand, Princeton, 1957).

1960 *Axiomatic Set Theory* (Van Nostrand, Princeton, 1960).

TARSKI, AFRED (nac. 1902)

1923-38 *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from* 1923 *to* 1938, traducción de J. H. Woodger (Clarendon Press, Oxford, 1956). Para la historia del Teorema de Deducción, cfr. las notas de la p. 32.

1928 Para la historia del Teorema Ascendente de Löwenheim-Skolem, cfr. las notas del editor al final de Skolem (1934) (donde lo atribuye a Tarski, seminario de la Universidad de Varsovia, 1927-8) y p. 94, nota 8, de Tarski y Vaught (1956) (donde Tarski da la fecha de 1928). Para demostraciones del teorema, cfr. Mendelson, p. 69, Margaris, p. 178.

1930, publicado en 1948 *A decision method for elementary algebra and geometry*, preparado para su publicación por J. C. C. McKinsey (The RAND Corporation, Santa Monica, California, 1948) pp. iii + 60. Edición revisada (University of California Press, Berkeley, 1951).

TARSKI, ALFRED (nac. 1902), MOSTOWSKI, ANDRZEJ (+1975) y ROBINSON, RAPHAEL MITCHEL (nac. 1911)

1953 *Undecidable Theories* (North-Holland, Amsterdam, 1953).

TARSKI, ALFRED (nac. 1902) y VAUGHT, ROBERT L.

1956 'Arithmetical Extensions of Relational Systems', *Compositio Mathematica*, vol. 13 (1957) pp. 81-102. Recibido el 16 de Febrero de 1956.

TURING, ALAN MATHISON (1912-54)

1936 'On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem', *Proceedings of the London Mathematical Society*, series 2, vol. 42 (1936-7) 230-65 (correcciones en el vol. 43 (1937) 544-6). Recibido para su publicación el 28 de Mayo de 1936. Leído el 12 de Noviembre de 1936. Reimpreso en Davis (1965, pp. 116-51) (correcciones en las pp. 152-4).

VAN HEIJENOORT, JEAN

1967 *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931 (Harvard University Press, 1967).

WHITEHEAD, ALFRED NORTH (1861-1947) y RUSSELL, BERTRAND (1872-1970)

1910-13 *Principia Mathematica*, 3 vols (Cambridge University Press, 1910-13; segunda ed., con nueva introducción y apéndices, 1925-7).

ŻYLIŃSKI, EUSTACHY

1924 'Some remarks concerning the theory of deduction', *Fundamenta Mathematicae*, vol. 7 (1925) 203-9. Con fecha de Mayo de 1924.

INDICE DE AUTORES, TERMINOS Y SIMBOLOS UTILIZADOS

AB, sistema del cálculo proposicional clásico de Anderson y Belnap, 149-157
  axiomas de, 150
  completud semántica de, demostración, 154-155
  consistencia de, demostración, 153-154
  decidibilidad de, demostración, 155-156
  reglas de inferencia de, 150
Abiertas, fbfs, 163
Absoluta, consistencia, 97-98
Ackermann, W., 260, 261, 284, 293, 297
Adecuación de $SQ^{=}$, 227-229
Adecuados, conjuntos de conectivas, 80-90
Alcance de un cuantificador,
Aleph sub cero ($\aleph_0$), 33
Algebra
  resultados metateóricos para el álgebra elemental de los números reales, 290
Algebraicas, demostraciones-de completud, 115 y n. 158
Algoritmo, 28-29
Alfabeto, 18
α - categoricidad, (alfa-categoricidad), 231
Análisis, 234 y n. 244
  no-clásico, 234
Anderson, A. R., 98, 115, 147-149, 293
A^{prop}, 225
Argumentos de una función, 65-66
Aritmética, 233-234 y n. 244
  sistema formal de la, 252
  no-clásica, 233-234
  de Robinson, 233-234
Aritmética, diferencia -, 262
Aritmética, función de diferencia-, 262
Ascendente, Teorema - de Löwenheim - Skolem, 229
Asociación a P, 101
Atómicas, fbfs - de Q, 162
Av/t (notación), 163
Axioma multiplicativo, es decir, el Axioma de Elección, *q.v.*,
Axioma de Elección, 18 y n. 59, 48, 287-288
Axioma del Conjunto Potencia, 32-33, 37, 40, 58
Axiomas
  de AB, 150
  de C, 257
  de H, 266
  de Q (aritmética de Robinson), 231-232 y n. 244
  de R (aritmética de Robinson), 231-232 y n. 244
  de SP, 90-91
  de SQ, 192-193
  de SQ^{M}, 237
  de $SQ^{=}$, 224
  de Z, 22

específicos de una teoría de primer orden, 199
lógicos de una teoría de primer orden, 199

Bar-Hillel, Y., 288, 295
Belnap, N. D., 98, 115, 147-149, 293
Bernays, P., 284, 291, 293
Binaria, conectiva -, 68-69
Booleana, álgebra -, aplicada a la lógica proposicional, 115, n. 158
Bradlaugh, C., 26
Brady, R. T., 13

C., un sistema no-formal de la teoría de números, 257
^{c} (A^{c}, un cierre cualquiera de A), 177
Caianello, E. R., 294
Cálculo de clases decidible, 241
Cantor, G., 32, 33, 38, 40, 41, 48, 54, 56, 57, 58, 293
Cantor, argumento de la diagonal de-, 38-39
Cantor, Teorema de -, 40-41, 57
Cardinal, número -
del continuo, 47
de un conjunto, notación para el -, 32
tener el mismo número cardinal que, 31
tener un número cardinal más pequeño que, 32
tener un número cardinal mayor que, 31
transfinito, 33
Cardinalidad
tener la misma cardinalidad, 31-32
Categoricidad, 230-231
α - categoricidad, 231
Cerradas, fbfs - (oraciones), 163
Cerrado, sistema formal -, definición, 207
Cerrados, términos - de Q, 162
Cierre, 164
Church, A., 13, 29, 97, 113, 259-260, 284, 291, 294
Church, Teorema de -, 259-260
Church, Tesis de -, 29, 247, 259-260, 267, 279-280, 288, 290, 291
Clases, cálculo de - decidible, 241
Clásica, lógica - de primer orden, 12
Cohen, P. J., 58, 288, 294
Combinación, 262
Comillas
convención acerca de la eliminación de -, 74
Compacidad, Teorema de -
para P, demostración, 136-137
para P, demostración desde el punto de vista de la teoría de modelos, 136-138
para teorías de primer orden, demostración, 217-218
usado para obtener un modelo noclásico, 233
Complejos, números -, 47
Complemento de un conjunto, 249
relativo, 249
Completud, 24, 112 ss., 138 ss.
completud semántica de AB, demostración, 155
completud semántica de SP demostrada por el método de Henkin, 126-134
completud semántica de SP demostrada por el método de Kalmár, 116-125
completud semántica de SQ, demostración, 222-223
completud semántica de SQM, demostración, 238
completud semántica de $SQ^{=}$, demostración, 228
completud semántica para SP, definición, 114
completud sintáctica de SP, demostración, 138-139
completud sintáctica para SP, definición, 138

demostraciones algebraicas de-, 115 y n. 158
omega-, 286
semántica, 112-116
sintáctica, 138-140
teorema de completud fuerte para SP, 126, demostración, 134
teorema de completud fuerte para SQ, demostración, 223
Computables, funciones-, 250
Computación, 29
Conjunción, 67, 69 y n. 158
Conectivas
binarias (=diádicas), 69
conjuntos adecuados de-, 80-90
de P, 72-73
de Q, 161
diádicas (=binarias), 69
monádicas, 68
proposicionales veritativo - funcionales, definición, 67-68
triádicas, 69
Conjuntos
Axioma de Elección, 33 y n. 59, 48, 287-288
Axioma del Conjunto Potencia, 32-33, 37, 40, 58
cardinalidad, 31-34
complemento, 249
complemento relativo, 249
correspondencia uno a uno (1 – 1) entre-, 31
criterio de identidad para-, 12
decidibles, 30
el conjunto vacío, 12, 32, 77, 174
enumerables, 32
enumeración de, 41
enumeración efectiva de los-, 42
finitos, 32, definición de Peirce, 33
infinitos, 32-33, definición de Dedekind, 33
los conjuntos finitos son decidibles, 31
no-numerables, 32
notación épsilon de la pertenencia a un conjunto, 12
notación mediante llaves para-, 11
numerables, 32
potencia, 37
recursivamente enumerables, 288-289
recursivos, 263
subconjunto, 37
subconjunto propio, 31
unión de-(∪), 43
Consecuencia
consecuencia inmediata en AB, 150
consecuencia inmediata en SP, 91
consecuencia inmediata en SQ, 193
consecuencia inmediata en Z, 22
consecuencia semántica para P, 77
consecuencia semántica para Q, 173-174
consecuencia sintáctica en SP, 94
consecuencia sintáctica en SQ, 194
desde el punto de vista de la teoría de la demostración, *véase* Sintáctica, consecuencia desde el punto de vista de la teoría de modelos, *véase* Semántica, consecuencia-,
inmediata, 21
lógica, *véase* Semántica, consecuencia-,
semántica, 20
sintáctica, 22, 94
Consistencia, 24, 97
absoluta, 97
de AB, demostración, 153-154
de H, 267
de la teoría de conjuntos, 58, 236, 267
de SP, simple y absoluta, demostración, 98-103
de SQ, demostración, 194-195
de SQ^M, demostración, 238
de $SQ^=$, demostración, 225-226, 228-229

omega-, 286
simple, 97
Consistente, conjunto - de SQ, 194
Constantes
individuales, 161
Continuo, 47
número cardinal del-, 47
lineal, 47
real, 47
Continuo, Hipótesis del-, 58
Generalizada, 58, 288 y n. 292
Convenciones
sobre comillas, 74
sobre la eliminación de paréntesis, 74
Correspondencia uno a uno (1 – 1), 31
Cresswell, M. J., 13, 298
Crisipo, 33
Crossley, J. N., 13
Cuantificación, 161
Cuantificador
existencial, 164
particular, 164
universal, 161

D (A), 149
Davis, M., 261 y n. 292, 289, 294, 296, 300, 301, 304
d-consistente (es decir, consistente desde el punto de vista de la teoría de la demostración), fórmula-/conjunto de fórmulas-de SP, definición, 94-95
Débil, inducción matemática-, 105
Decidibilidad, 24, 30-31
de AB, demostración, 155
de conjuntos finitos, 31
de la geometría elemental, sin la noción general de número natural, 290
del álgebra elemental de los números reales, con adición y multiplicación, pero sin la noción general de número natural, 290
de la teoría elemental de números, con adición pero sin multiplicación, 290
del cálculo simple de clases, 241
de SP, demostración, 141
de SQ^M, demostración, 238-243
Decidible, 30, 141
subclases - de fórmulas de Q lógicamente válidas, 282-285
Decidible, conjunto-, 30
Decidible, fórmula-, 141
Decidible, sistema-, 141
Dedekind, R., 33, 261, 295
Dedekind, definición de - de conjunto infinito, 33-34
Deducción, Teorema de-
demostración del - para teorías de primer orden, 200
para SP, 103, demostración, 103-107
para SQ, demostración, 195-196
tres condiciones suficientes para el-, 107-108
Deductivo, mecanismo-, 19, 21-22
para P, 90-95
para Q, 192-194
Definibilidad
de funciones en un sistema formal, 264-265
de nombres numerables y adjetivos numerables, 234-236
en H de las funciones iniciales, 270-273
Definiciones
recursivas, 261
Demostración
de longitud finita, demostraciones-, útiles para la metateoría, 132
de longitud infinita, demostraciones-, 44
demostraciones en un sistema y demostraciones acerca de un sistema, 25-26
de que el conjunto de las distintas

fbfs de longitud finita que pueden obtenerse a partir de un alfabeto enumerable es numerable, 45
de que el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales es no-numerable, 37-39
de que el conjunto potencia de un conjunto siempre tiene un número cardinal mayor que el conjunto mismo (Teorema de Cantor), 40-41
en AB, definición, 150
en SP, definición, 92
en SQ, 193
Demostración, teoría de la, 19, 22
Derivación
en SP, 94
en SQ, 193
en un sistema, 22
Derrick, J., 13
Desde el punto de vista de la teoría de la demostración, conjunto consistente-
de SP-, definición, 94, 128, 131, 132, 133, 134, 135
de SQ, 194
Desde el punto de vista de la teoría de la demostración, conjunto inconsistente- de SP, definición, 94-95
de SQ, 194
Desde el punto de vista de la teoría de la demostración, consecuencia-, *véase* Sintáctica, consecuencia-,
Desde el punto de vista de la teoría de modelos, fórmula/conjunto de fórmulas de P consistente/inconsistente-, 77
Desde el punto de vista de la teoría de modelos, consecuencia-, *véase* Semántica, consecuencia-,
Designados, valores-, 143
Diádica, conectiva-, 68-69
Diagonal, argumento de la-, 38-39
Diferencia aritmética, 262
d-inconsistente (es decir, inconsistente desde el punto de vista de la teoría de la demostración), fórmula-/conjunto de fórmulas de SP, definición, 95
Disyunción, 69 y n. 158
disyunción primitiva de AB, 149
exclusiva, 88
Disyuntiva, forma normal-(FND), 82-83, 116
Disyuntiva, parte - de una fbf de AB, 149
Dominio
de una interpretación, 166
de una relación, 64

E, regla-, 220
Edwards, P., 294
Efectiva, enumeración-, 42
Efectivo, método-, 28-30, 247 ss.
Efectivo, procedimiento - de demostración
definición, 142
para AB, 150-153, 156
Ejercicios, 19-20, 20-21, 22-23, 24, 26-28, 29-30, 31, 32, 33-36, 42, 58, 70-72, 175-176, 191-192
Elección, Axioma de-, 33 n. 60, 48, 287-288
Elección, Regla de-, 220
Elemental, álgebra - de los números reales, resultados metateóricos, 290
Elemental, geometría, resultados metateóricos, 290
Elemental, teoría - de números, resultados metateóricos, 291
Elementales, teorías-, 290, n. 292
En, «está en», utilizado para significar «es un elemento de», 105, 133
Enumerable, conjunto-, 32
Enumerable, secuencia-, 41

Enumeración, 41
efectiva, 42
Enumeración, teoremas de -
para P, 203
para teorías de primer orden, 130
Epsilon, notación - para pertenencia a conjuntos, 12
Específicos, axiomas - de una teoría de primer orden, 199
Esquema, 139
Estoicos, 33, 114 y n. 158, 115
Euclides, 28, 288
Existencial, cuantificador-, 164
Exponenciación, función, 262
Extensión de un sistema, 203
finita, 258

Falso para una interpretación
de P, 76
de Q, 173
fbfs (fórmulas bien formadas), *véase* Fórmulas
Feferman, S., 287, 296
Filosóficas, implicaciones-, 234-237
Filosóficas, cuestiones-
acerca de la definición de nombres numerales y adjetivos numerales, 234-236
acerca de las diferencias entre conectivas ordinarias y veritativo-funcionales, 13, 70-72
acerca de la validez del Modus Ponens para $\supseteq$ o $\vee$ como regla de inferencia, 148-149
Finita, extensión - de un sistema, 258
Finitista, sistema formal-, 44
Finito, conjunto-, 32
definición de Peirce de-, 33
todo conjunto finito es decidible, 31
Finito, modelo - fuerte, 144
Finito, modelo - débil, 144
Finitud, Teorema de - para P, 135
Fitch, F. B., 222 n. 244, 295
FND (forma normal disyuntiva), 82-83, 116
Formación, reglas de-, 18
Formal, derivación-, 22
Formal, lenguaje-, 17, 18-20
Formal, sistema - de la aritmética, 252-253, 265-267 (H)
notable, 252
Formales, demostraciones-, 21-22, 25-26
Formales, sistemas-, 21-23
cerrados, definición, 207
de la aritmética, 252-253, 265-267 (H)
notables de la aritmética, 252
Formales, teoremas-, 22, 26
Fórmula proposicional asociada (F.p.a), 225
Fórmulas (fbfs), 18
abiertas, 163
cierre de una fbf, 164
conjunto simultáneamente satisfacible de-, 172-173
de AB, 149
de M, 237
de P, 73
de Q, 162
de W, 19
de X, 19
de Y, 19
de Z, 22
fbfs atómicas de Q, 162
fbfs cerradas, 163
indecidibles, 141
satisfacibles, 172
válidas para todo dominio finito no vacío pero no lógicamente válidas, 191
Fórmulas bien formadas (fbfs), *véase* Fórmulas
F.p.a. (fórmula proposicional asociada), 225
Fraenkel, A. A., 12, 56, 57 n. 60, 287, 288, 291, 295

Frege, F. L. G., 290, 295
Fuerte, completud-,
de SP, 126, demostración, 134
de SQ, demostración, 223
Fuerte, inducción matemática-, 104
Fuerte, representación - de una función en un sistema formal, 264
Función, símbolos de - de Q, 161, 164
Funciones, 64-66
argumentos de, 65
computables, 250
criterio de identidad para funciones, 66
definibilidad de - en un sistema formal, 264-265
de *n* argumentos, 65
de números naturales a números naturales, 66
dominio de-, 64
función de diferencia aritmética, 262
función exponenciación, 262
función producto, 262
función sucesor, 262
función suma, 262
iniciales, 262
lambda-definibles, 259-260
no-computables, 251
rango de, 64
recursivas, 259, 261-263, definición, 263
recursivas generales, 259
recursivas parciales, 261
recursivas primitivas, 259, 261
representación de - en un sistema formal, 263-264
representación fuerte de - en un sistema formal, 264
totales, de números naturales a números naturales, 251
Turing-computables, 263
valores de las-, 66

Galileo, 33, 295
Generales, funciones recursivas-, 259
Generalizada, Hipótesis - del Continuo, 58, 288 y n. 292
Generalizado, Teorema de Gödel-, 257
Gentzen, G., 291, 295-296
Geometría
resultados metateóricos para la geometría elemental, 290
Goddard, L., 13
Gödel, K., 58, 214, 217, 259, 260, 261, 284, 286-287, 290, 291
Gödel, numeración de-, 254-256
Gödel, segundo teorema de incompletud de-, 267, 287
Gödel, teoremas de-, 286-287
Graves, J. A., 13
Grzegorczyk, A., 261 n. 292, 268 n. 292, 296

H (un sistema formal de la aritmética), 265-267
axiomas de, 266
consistencia de, 267
definibilidad de las funciones iniciales en-, 270-273
demostración de la indecidibilidad de-, 267-279
toda función recursiva es definible en-, 279
todo conjunto decidible de números naturales está representado en-, 279
todo conjunto recursivo de números naturales está representado en-, 279
Harrop, R., 141, 143, 296
Hartshorne, C., 300
Heijenoort, J. van., 287 n. 292, 293, 295-300, 302-304
Henkin, L., 77, 115, 126, 212 n. 244, 233, 296-297
Herbrand, J., 103, 259, 284, 297

Hermes, H., 261 n. 292, 297
Herradura ($\supseteq$), 72-73
Hersh, R., 288, 294
Hilbert, D., 40, 103, 260, 261, 284, 290, 293, 297
Hintikka, K. J. J., 297, 298, 301
Hiz, H., 140, 298
Hiz, sistema de-, 140
Hobbes, T., 74 n. 158, 298
Hughes, G. E., 13, 298

i, 47
Identidad, 224-225, 226
  axiomas para la-, 224
  para conjuntos, 12
  para funciones, 66
Imaginarios, números, 47
Incompletud
  de cualquier sistema formal finitista de la teoría no-restringida de los números naturales, 44-46
  de la teoría de conjuntos (si es consistente), 291
  de la teoría elemental de números, 291
  omega-, 286
Inconsistencia, omega-, 286
Inconsistente, conjunto de SQ, 194
Indecidibilidad, 247 ss.
  de algunos cálculos proposicionales parciales, 141
  de algunos conjuntos de números naturales, 249
  de cualquier sistema formal notable de la aritmética, 253
  de la teoría de conjuntos (si es consistente), 291
  de la teoría elemental de números, con la adición y la multiplicación, y con la noción general de número natural, 291
  de SQ, 280
  de $SQ^{=}$, demostración, 280
Indecidible, fórmula-, 141
Indecidible, sistema-, 141
Independencia, 24, 144
  del esquema de axioma SP1, 145
  del esquema de axioma SP2, 147
  del esquema de axioma SP3, 147
Individuales, constantes - de Q, 161
Individuales, variables - de Q, 161
Inducción matemática, 104, 108
  débil, 105
  fuerte, 104
  transfinita, 291
Infinitesimales, 234
Infinitistas, sistemas-, 44
Infinito, conjunto-, 32-33
Iniciales, funciones-, 262
Inmediata, consecuencia-, 21
  en AB, 150
  en SP, 91
  en SQ, 193
  en Z, 22
Instancia de un esquema tautológico de Q, 178, 197
Interpolación, Teorema de-
  para P, 79-80, 108-109
  para SP, 136
Interpretación, 19,20
  de P, 75
  de P, en sentido ampliado, 142-143, 145-146
  de Q, 165 ss.
  normal, 226
Isomorfismo de modelos, 230

Kalmár, L., 115, 117, 121, 284, 285, 298
Keene, G. B., 13
Kleene, S. C., 13, 33, 115 n. 158, 195, 259, 261 n. 292, 296, 298
Kline, M., 294
Kneale, W. C., y M., 286 n. 292, 298
k-validez, 174, 185

Lambda-definibles, funciones-, 259-260

Lambert, K., 286, 299
Leblanc, H., 299
Lemmon, E. J., 299
Lenguaje
de AB, 149
de orden superior, 165
de primer orden, 165
de segundo orden, 165
de tercer orden, 165
formal, 17, 18-20
M, 237
P, 72-73
Q, 161-162
Q^+, 165
W, 19
X, 19
Y, 19
Z, 22
Libres
apariciones - de variables, 162
t está libre para v en A, definición, 163
variables, 162
Ligadas
apariciones - de las variables,
Ligadas, variables-, 162
Lindenbaum, A., 126, 131, 133, 299
Lindenbaum, Lema de-, 126, 131, 133, 141, 203, 299
para SP, 126, demostración, 131-133
para teorías de primer orden, demostración, 203-204
Lineal, continuo-, 47
Llaves, notación para conjuntos mediante-, 11
Löb, M. H., 13
Lógica, el Santo Grial de la-, 113
Lógica, consecuencia-, *véase* Semántica, consecuencia-
Lógica, validez-, 20
de P, 76
de Q, 173
y el dominio vacío, 285-286
Lógicamente válida, fórmula-
de P, 76
de Q, 173
Lógicos, axiomas - de una teoría de primer orden, 199
Łoś, J., 115 n. 158, 299
Löwenheim, L., 216, 217, 285, 289, 290, 299
Löwenheim - Skolem, Teorema de-, 216-217, 229, 236
El Teorema Ascendente de Löwenheim - Skolem, 229, 231
Łukasiewicz, J., 103, 115, 299

M (un lenguaje formal para la lógica de predicados monádicos de primer orden), 237
semántica para-, 237
Macintyre, A., 13
Margaris, A., 13, 220, 222 n. 244, 299, 304
Markov, A. A., 260, 261 n. 292, 299
Markov, algoritmos de-, 263
Material, implicación-, 67
Matemática, inducción, 104, 108
débil, 105
fuerte, 104
Matemáticas, teorías
resultados metateóricos para-, 290-291
Matriz de una fórmula en forma normal prenexa, 282
Mates, J. R. B., 114 n. 158, 222 n. 244, 299
Máximo, conjunto d-consistente - de SP, 126, definición, 129; 131-133
m-consistente (es decir, consistente desde el punto de vista de la teoría de modelos), fórmula/conjunto de fórmulas - de P, 77
McKinsey, J. C. C., 304
Mendelson, E., 12, 13, 33 n., 59, 220, 222, 287, 299, 303

Mención, 25-27
Metalenguaje, 25
Metateorema, 13, 26
Metateoría, 24
  de la lógica, 24
Metateóricos, resumen de resultados-, 289-291
Meyer, R. K., 286, 299
m-inconsistente (es decir, inconsistente desde el punto de vista de la teoría de modelos), fórmula/conjunto de fórmulas de P-, 77
Modelo, 20
  de una fórmula/conjunto de fórmulas de P, 76
  de una fórmula/conjunto de fórmulas de Q, 173
  de un sistema formal, 173
  enumerable, 209
  finito, 209
  finito débil, 144
  finito fuerte, 144
  isomorfismo de modelos, 230
  no-clásico, 231 ss.
  no-numerable, 209
  normal, 226
  numerable, 209
Modelos, teoría de-, 19, 20
Modus Ponens (MP)
  para $\supseteq$, en SP, 91
  para $\supseteq$ o $\vee$, problema filosófico acerca del, 148-149
Monádica, conectiva-, 68
Mostowski, A., 287, 289, 290 n. 292, 300, 304
MP, *véase* Modus Ponens
Muestra, 18, 19
Multiplicativo, Axioma, es decir, el Axioma de Elección, *q.v.*
μ-operación (mu-operación), 262
Natural, sistemas de deducción, 12
Naturales, números-, 32
  resultados metateóricos para sistemas de la aritmética de los-, resumen, 290-291
  teoría no-restringida de los-, 45
  teorías elementales de los-, 290-291 y n. 292
Negación, 67
Negación, completud respecto de la-, 138 n. 158, definición, 203
Neumann, J. von, 291
No-Cantoriana, Teoría de Conjuntos-, 287, 294
No-computables, funciones-, 251
No-clásica, aritmética-, 233-234
No-clásico, análisis-, 234
No-clásicos, modelos-, 231 ss.
No-numerable, conjunto-, 32
No-restringida, teoría - de los números naturales (en oposición, por ej., a las teorías elementales, *véase* p. 290 n. 292), 44
Normal, interpretación-, 226
Normal, modelo-, 226
Notable, sistema formal - de la aritmética, 252
n-tuplas, 41, 65, 167
Numerable, conjunto-, 32
Numerales, adjetivos-, 235-236
Numerales, nombres-, 236
Número
  cardinal de un conjunto, notación para el-, 32
  cardinal transfinito, 33
  complejo, 47
  imaginario, 47
  natural, 32
  racional, 34 n., 59
  real, 47-48
Números, teoría de -, resultados metateóricos para la-, 290-291
O..., o..., 70
Objeto, lenguaje-, 25

Omega-completud, 286
Omega-consistencia, 286
Omega-incompletud, 286
Omega-inconsistencia, 286
Oraciones (fbfs cerradas), 163
Orden superior, predicados y lenguajes de-, 165

P (un lenguaje formal para la lógica proposicional), 72-73
asociación a-, 101
m-consistente (es decir, consistente desde el punto de vista de la teoría de modelos), fórmula-/conjunto de fórmulas de-, 77
m-inconsistente (es decir, inconsistente desde el punto de vista de la teoría de modelos), fórmula-/conjunto de fórmulas de-, 77
semántica, consecuencia - para-, definición, 77
semántica para-, 75-79
tautología de-, 78
Parciales, cálculos proposicionales - (Harrop), 141
Parciales, funciones recursivas-, 261
Paréntesis, convención acerca de la eliminación de-, 74
Particular, cuantificador-, 164
Peano, G., 261, 287, 300
Peirce, C. S., 33, 86, 300
Peirce, definición de - de un conjunto finito, 33
Péter, R., 261 n. 292, 300
Post, E. L., 85, 86, 103, 115, 116, 249, 260, 289, 300
Potts, T. C., 13
Potencia, conjunto-, 37
Potencia, Axioma del Conjunto-, 32-33, 37, 40, 58
Predicados, cálculo de - puro, 280
Predicados de orden superior, 165
Predicados de segundo orden, 165
Predicados de tercer orden, 165
Predicativos, símbolos - de Q, 161
Prefijo de una fórmula en forma normal prenexa, 282
Prenexa, forma normal-, 282-284
Presburger, M., 290, 300
Primer orden, lenguaje de-, 165
Primer orden, lógica de predicados monádicos de-, 237-243
resultados metateóricos para la-, 289
Primer orden, teorías de-, 173, 221-222
con identidad, 226
conjunto consistente de una teoría de primer orden, 199
consecuencia sintáctica en una teoría de primer orden, 199
demostración en una teoría de primer orden, 199
derivación en una teoría de primer orden, 199
Lema de Lindenbaum para -, demostración, 203-204
modelo de una teoría de primer orden, 199
resultados metateóricos para-, 289-290
teorema de compacidad para -, demostración, 217-218
teorema de deducción para -, demostración, 200
teorema de una teoría de primer orden, 199
teorema de enumeración para-, 202
Primitiva, disyunción-, 149
Primitivas, funciones recursivas-, 259, 261
Principia Mathematica (Whitehead y Russell), 86, 103, 115, 286, 287, 304
Producto, función-, 262
Propio, subconjunto-, 31
Proposicionales, símbolos-
de P, 72-73
de Q, 161

Proposición, 21, 63
Puro, cálculo de predicados-, 280

Q (un lenguaje formal para la lógica de predicados de primer orden), 161-162
consecuencia semántica para -, definición, 173-174
fórmula lógicamente válida de-, 173
semántica para -, 165 ss.
términos de-, 162
verdadero para una interpretación de -, 173
Q (aritmética de Robinson), 231 y n. 244
Q^+, 165
Quine, W, v. O., 115, 222 n. - 244, 286, 301

R (una teoría de primer orden: la aritmética de Robinson), 233-234
Racionales, números, 34 n. 59
Rango, 64
Real, continuo-, 47
Reales, números-, 47-48
Reales, teoría de los números-, resultados metateóricos para la-, 290
Recursivas, definiciones-, 261
Recursivas, funciones-, 259, 261-263
definición, 263
Recursivamente enumerables, conjuntos, 288-289
Recursivo, 259 ss., 261 ss.
Recursivos, conjuntos-, 263
Regla E, es decir, Regla de Elección, 220
Regla de Elección, 220
Reglas de Inferencia, 21
de AB, 150
de SP, 91
de SQ, 193
sistemas con una regla clásica de substitución como regla de inferencia, 140
Relación
dominio de una-, 64
rango de una-, 64
Relativo, complemento - de un conjunto, 249
Representación
de una función en un sistema formal, 263-264
de un conjunto de números naturales en un sistema formal, 253, 264
fuerte (representación -) de una función en un sistema formal, 264
Robinson, A., 234, 301
Robinson, R. M., 231 n. 244, 290 n. 292, 301, 304
Robinson, aritmética de-, 233-234
Rockingham Gill, R. R., 13
Rogers, H., 261 n. 292, 289, 301
Rosenbloom, P. C., 288, 301
Rosser, J. B., 220, 222 n. 244, 288, 291, 296, 301
Rubin, H. y J., 288, 301
Russell, B. A. W., 27, 86, 103, 116, 286, 287, 288, 301, 304

Satisfacción
de una fórmula por una secuencia enumerable de objetos, 167 ss, 172
y verdad, 173
Satisfacibles, fórmulas-, 172
Schoenfield, J. R.,
Schönfinkel, M., 284
Schütte, K., 115, 148, 284, 302
Schwarz, K. H. A., 33
Secuencias, 41, 167
enumerables, 41
términos de las-, 41

Segundo orden, predicados y lenguajes de-, 165
Semántica, completud-,
de AB, demostración, 155
de SP, demostración por el método de Henkin, 126-134
de SP, demostración por el método de Kalmár, 116-125
de SQ, demostración, 222-223
de SQ^M, demostración, 238
de $SQ^=$, demostración, 228
para SP, definición, 114
Semántica, consecuencia
para P, definición, 77
para Q, definición, 173-174
Semántica
para AB, 153
para M, 237
para P, 75-79
para Q, 165 ss.
«Semántico», 23
Sheffer, H. M., 86, 302
Shepherdson, J. C., 247 n. 292, 302
Si..., 13, 70, 71-72
Sii, abreviatura de «si, y sólo si», 31
Sin axiomas, sistemas-, 12
Símbolo, 18
Simmons, H., 13
Simple, consistencia-, 97
Simultáneamente satisfacible, conjunto de fórmulas de Q-, 172
Sintáctica, completud-, 139-140
demostración de que SQ no es sintácticamente completo, 224
de SP, demostración, 139
para SP, definición, 138
Sintáctica, consecuencia-, 22, 94
en SP, 94
en SQ, 194
«Sintáctica, tautologicidad», 101
«Sintáctico», 23
Sistema
AB, 149-150
C, 257-258
formal, 21-23
formal cerrado, 207
H, 265-267
Q (aritmética de Robinson), 231 y n. 244
R (aritmética de Robinson), 232 (cf. 231, n. 244)
SP, 90-91
SQ, 192-193
SQ^M, 237-238
$SQ^=$, 224
Z, 22
$s(k/d)$, 179
Skolem, T., 216, 217, 233, 236, 261, 284, 290, 302-303
Skolem, forma normal de-, 284
Skolem, paradoja de-, 236-237, 302-303
Słupecki, J., 299
Smith, R. N. W., 13
Smullyan, R. M., 13, 303
SP (un sistema formal para la lógica proposicional), 90-95
axiomas de-, 90
completud fuerte de-, demostración, 134
completud semántica, demostración por el método de Henkin, 126-134
completud semántica, demostración por el método de Kalmár, 116-125
completud semántica para, definición, 114
completud semántica, teorema de-, 124
completud sintáctica de-, demostración,
completud sintáctica para-, definición, 138
consecuencia sintáctica en-, 94
consistencia, simple y absoluta, demostración, 98-103
d-consistente (es decir, consistente

desde el punto de vista de la teoría de la demostración), conjunto/fórmula de-, 94-95
decidibilidad de, demostración, 141
deducción, teorema de-, para-, demostración, 103-107
demostración en-, 92
derivación en-, 93-94
desde el punto de vista de la teoría de la demostración, consistente-, conjunto/fórmula de-, 94
desde el punto de vista de la teoría de la demostración, inconsistente-, conjunto/fórmula de-, 94-95
regla de inferencia de, 91
teorema de-, 93
SQ (un sistema formal para la lógica de predicados de primer orden), 192-194
axiomas de-, 192-193
conjunto consistente (es decir, consistente desde el punto de vista de la teoría de la demostración) de-, 194
conjunto inconsistente (es decir, inconsistente desde el punto de vista de la teoría de la demostración) de-, 194
consecuencia sintáctica en-, 194
consistencia de-, demostración, 194-195
demostración en-, 193
derivación en-, 193
es indecidible, 280
los no-teoremas no son efectivamente enumerables, 280
no es completo respecto de la negación, 223
no es sintácticamente completo, 224
sus teoremas son efectivamente enumerables, 280
teorema de-, 193
teorema de deducción para-, demostración, 195-196
SQM (un sistema formal para la lógica de predicados monádicos de primer orden), 237 ss.
consistencia de-, demostración, 238
decidibilidad de-, demostración, 238-243
no es completo respecto de la negación, 238
no es sintácticamente completo, 238
teorema de completud semántica, 238
SQ$^{=}$ (un sistema formal de la lógica de predicados de primer orden con identidad), 224 ss.
adecuación de-, 227-229
axiomas de-, 224
completud semántica de-, demostración, 228
consistencia de-, demostración, 225-226, 228
indecidibilidad de-, demostración, 280
los no-teoremas no son efectivamente enumerables, 280
sus teoremas son efectivamente enumerables, 280
Stewart, D. J., 302
Stoll, R. R., 115 n. 158, 303
Stoothoff, R. H., 13
Strawson, P. F., 72, 303
Subconjunto, 37
propio, 31
Substitución, regla de-
sistemas con una regla clásica de substitución como regla de inferencia, 140
Sucesor, función-, 262
Suma, función-, 262
Suppes, P., 12, 288, 303
Susceptible de demostración, esquema-, 139
Szabo, M. E., 296

Tarski, A., 103, 131, 165 n. 244, 217, 229, 290 y n. 292, 299
Tautología
  comparación con fórmula lógicamente válida de Q, 78, 166
  de P, 78
«Tautologicidad sintáctica», 101
Tautológico, esquema-, 139
  instancia de un esquema tautológico de Q, 178, 197
TD, abreviación de «Teorema de Deducción», 117
Teorema y metateorema, 26
Teorema de un sistema, 22, 26
Teorema
  de SP, 93
  de SQ, 193
Teoría de conjuntos, 12, 30-45, 47-58, 236-237, 267, 288, 291
  consistencia de la-, 58, 236, 267
  de von Neumann-Bernays-Gödel, 291
  de Zermelo-Fraenkel, 287, 291
  es indecidible si es consistente, 291
  no-cantoriana, 288
  resultados metateóricos para la-, 291
Términos
  de Q, 162
  de una secuencia, 41
  términos cerrados de Q, 162
Tilde, 72-73
Topología aplicada en la demostración de completud para la lógica proposicional, 115 y n. 158
Totales, funciones- de números naturales a números naturales, 250
Transfinita, inducción, 291
Transfinitos, cardinales-, 33
Transformación, 225
Transformación, regla de-, 21
Triádicas, conectivas-, 69
t^*s, 171-172
Turing, A. M., 259-260, 304
Turing-computables, funciones-, 260, 263
Turing, máquinas de-, 260

Unión ($\cup$), 43
Universal, cuantificador-, 161
Uno a uno, correspondencia-, 31
Uso y mención, 25 ss.

Vacío, dominio-, 285-286
Vacío, conjunto-, 12, 32, 77, 174
Validez
  k-validez, 174, 185
  validez lógica, 20, 76, (para P), 173, (para Q), y el dominio vacío, 285-286
Válido, 142, 143, 145, 146, 147
Valores, 143
  designados, 143.
  de una función, 66
van Heijenoort, J., 286 n., 292, 293, 295-300, 302, 303, 304
Variables
  apariciones libres de las, 162
  apariciones ligadas de las, 162
  individuales, 161
  libres, 162
  ligadas, 162
Vaught, R. L., 165 n., 244, 304
Verdad para una interpretación, 20
Verdadero para una interpretación
  de P, 75
  de Q, 173
Veritativas, funciones-, 66-72, definición, 66
Veritativo-funcional, lógica proposicional-, 63
  resultados metateóricos para la-, resumen, 290
Veritativo-funcionales, conectivas proposicionales-
  conjuntos adecuados de-, 80-90

definición, 68
diferencias con las conectivas del discurso ordinario, 13, 70-72
Veritativos, valores-, 66
von Neumann, J., 291

W (un lenguaje), 20
Weber, H., 33
Weiss, P., 299
Whitehead, A. N. y Russell, B. A. W., *Principia Mathematica*, 86, 103, 115, 116, 286, 287, 304
Wright, J. N., 13

X (un lenguaje), 20

Y (un lenguaje), 20

Z (un sistema), 22
Zermelo, E., 287, 291
Zyliński, E., 88, 304

{...} (notación para conjuntos), 12
$\in$ (es un elemento de), 12
ϕ (el conjunto vacío), 12
$\subset$ (es un subconjunto propio de), 31
$\bar{A}$ (el número cardinal del conjunto A), 32
$\aleph_0$ (aleph sub cero), 33
$\subseteq$ (es un subconjunto de), 37
$\langle ... \rangle$ (notación para secuencias), 41
$\cup$ (unión de conjuntos), 43
$A - B$ (el conjunto de todos los elementos de A que no son elementos de B), 44
$\mathfrak{c}$ (el número cardinal del continuo), 47
$\simeq$ (tiene una correspondencia uno a uno con), 51
$\supset$ (signo de implicación material: la herradura), 68, 72
$\wedge$ (signo de conjunción), 69
$\vee$ (signo de disyunción), 69
$\sim$ (signo de negación: la tilde), 73
$\vdash_P A$ (A es una fórmula de P lógicamente válida), 76
$A \vdash_P B$ (la fórmula B de P es una consecuencia semántica de la fórmula A de P), 77
$\Gamma \vdash_P B$ (la fórmula B de P es una consecuencia semántica del conjunto Γ de fórmulas de P), 77
$\vdash_{SP} A$ (es un teorema de SP), 93
$\Gamma \vdash_{SP} A$ (A es una consecuencia sintáctica en SP del conjunto Γ de fórmulas), 94
$A \vdash_{SP} B$ (A es una consecuencia sintáctica en SP de la fórmula B), 94
Λ (el cuantificador universal), 161
Av/t (la fbf que se obtiene a partir de A substituyendo todas las apariciones libres de v en A por t), 163
$\vee$ (el cuantificador existencial), 164
*, *véase la siguiente entrada*
t^*s (el elemento de D asignado por I al término t para la secuencia *s*), 171-172
A^c (un cierre cualquiera de A), 177
$s(k/d)$ (la secuencia que resulta de substituir el k-ésimo término de la secuencia *s* por el objeto d), 179
$\bar{S}$ (el conjunto de todos los números naturales que no son elementos de S), 249
α (alfa) (alfa-categoricidad), 231
λ (lambda) (funciones lambda-definibles), 259-260
μ (mu) (la mu-operación), 262-263
ω (omega) (omega-inconsistencia; omega-incompletud), 286

EDITORIAL PARANINFO S.A
Magallanes, 25.—Madrid-15.

ISBN: 84-283-1102-1